

Diss. Lund
1871.

OM GEOMETRISKA KURVOR MED DUBBEL KRÖKNING.

AKADEMISK AFHANDLING,

SOM, MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETEN I LUND,

KOMMER ATT OFFENTLIGEN FÖRSVARAS

AF

A. V. BÄCKLUND,

DOCENT I GEOMETRI,

Å LÄROSALEN N:o 1, LÖRDAGEN DEN 23 SEPT. 1871,

KL. 3 E. M.



LUND,

BERLINGSKA BOKTRYCKERIET,
1871.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552409_0081

§. I. Om skärningspunkterna emellan ytor och kurvor.

1. Då developpabla ytor och kurvorna i rymden motsvara hvarandra såsom korrelativa figurer, måste teorien för developpabla ytor, transformerad enligt korrelationsprincipen, blifva en teori för kurvorna i rymden. Men då de egenskaper för kurvorna, till hvilka denna teori skulle leda, nödvändigt äro transformationer af motsvarande egenskaper för developpabla ytor, är den nämnda teorien för kurvorna af ringare vikt; methoderna för undersökningen af developpabla ytor kunna sjelfva användas såsom metoder för undersökningen af kurvorna.

2. Om C^m är en developpabel yta af m :te klassen, och $C^n, C_1^n, \dots$ äro ytor af n :te klassen inskrifna i en och samma developpabla yta af klassen n^2 ; så äro de serskilda systemerna af mn gemensamma tangentplaner för C^m och de serskilda C^n att betrakta såsom ytor i en serie på det sättet bestämd, att m ytor gå genom en och samma arbiträra punkt. Från en arbiträr punkt kunna nemligen m tangentplaner dragas till C^m ; lika många C^n finnas, hvardera tangerande ett af dessa planer, och dermed bestämmande m systemer af mn tangentplaner gemensamma för C^m och C^n . — Polarplanerna för en godtyckligt tagen punkt O , såväl som de öfriga polarytorerna för samma punkt, respektive de nämnda serskilda systemerna tangentplaner, bilda då sjelfva en serie ytor af den beskaffenhet att genom en arbiträr punkt endast m af seriens ytor kunna dragas. — Man finner häraf att:

Polarplanerna för en arbiträr punkt O , i afseende på de serskilda systemerna gemensamma tangentplaner emellan en developpabel yta C^m af m :te klassen och de serskilda ytor som äro inskrifna i en och samma developpabla yta, enveloppera sjelfva en developpabel yta af m :te klassen, som tangerar de m tangentplanerna från O till C^m .

3. Om bland ytorna $C^n, C_1^n, \dots$ det finnes en yta C_0^n , som tangerar k af tangentplanerna till C^m från O , så bilda visserligen nu, såsom förut, polarytorna för en arbiträr punkt ι , respektive de serskilda systemerna gemensamma tangentplaner för C^m och de serskilda C^n , en serie, i hvilken m ytor gå genom en godtyckligt tagen punkt; men emedan första polaren för ι , respektive de gemensamma tangentplanerna för C^m och C_0^n , har en $k - 1$:faldig punkt i O , finnas endast $m - k + 1$ andra första polarer för ι , respektive lika många andra systemer gemensamma tangentplaner för C^m och vissa C^n , hvilka första polarer gå genom O . Dessa systemer tangentplaner äro då ock de enda, i afseende på hvilka polarplanerna för O gå genom ι ; och deraf följer:

Om C^m är en developpabel yta af m:te klassen, och bland de serskilda ytor $C^n, C_1^n, \dots$, som äro inskrifna i en och samma developpabla yta, en yta finnes tangerande k af de tangentplaner som från O kunna dragas till C^m ; så är enveloppen af polarplanerna för O , respektive de serskilda systemerna gemensamma tangentplaner för C^m och de serskilda C^n , en developpabel yta af klassen $m - k + 1$.

4. Om bland ytorna $C^n, C_1^n, \dots$ en yta C_0^n skulle tangera C^m i en punkt på dess beröringslinje L med ett tangentplan från O , så måste första polaren för en arbiträr punkt ι , respektive de gemensamma tangentplanerna för C^m och C_0^n , uppfylla följande villkor: 1^o gå genom L och derstädes tangera tangentplanet till C^m ; 2^o innehålla skärningslinierna mellan detta plan och de öfriga $mn - 2$ för de båda ytorna gemensamma tangentplanerna. Sålunda innehåller hvarje rät linie i det första tangentplanet minst $2 + mn - 2 = mn$ punkter som tillhöra första polaren för ι ; och då nu vidare denna yta är af ordningen $mn - 1$, följer häraf att första polaren för hvarje punkt i rymden, i afseende på de för C^m och C_0^n gemensamma tangentplanerna, innehåller det betraktade tangentplanet från O , att sålunda densamma ytan går genom O . Häraf blir slutligen en följd, att endast $m - 1$ andra systemer, för C^m och ytor i serien $C^n, C_1^n, \dots$ gemensamma, tangentplaner finnas, i afseende på hvilka första polarerna för ι gå genom O ; eller, på annat sätt uttryckt, i afseende på hvilka polarplanerna för O gå genom ι .

Härmed är följande sats bevisad:

Om C^m är en developpabel yta af m:te klassen och $C^n, C_1^n, \dots$ äro ytor inskrifna i en och samma developpabla yta, samt någon yta C_0^n bland dem skulle finnas, som tangerar k af de tangentplaner, hvilka från O kunna dragas till C^m , i punkter på deras beröringslinier med denna sednare yta; så envelopperar polarplanet för O , respektive systemerna gemensamma tangentplaner för C^m och

de serskilda C^n , en developpabel yta af klassen $m - k$. Denna ytas tangentplaner från O äro de öfriga $m - k$ tangentplanerna från samma punkt till C^m .

5. I stället för den i det föregående betraktade developpabla ytan af m :te klassen föreställa vi oss nu en yta C^m af m :te klassen, som icke är developpabel, utan har plana skärningskurvor af μ :te klassen. De serskilda developpabla ytor, som äro omskrifna C^m och de serskilda C^n bilda en serie, hvars beskaffenhet man bestämmer på följande sätt. En i rymden godtyckligt tagen punkt p är spets för en tangentkägla till C^m ; denna kägla är af ordningen μ och klassen m , och sålunda finnas $\mu + 2m(n - 1)$ ytor: $C^n, C_1^n, \dots$ som tangera käglan. De developpabla ytor, som äro omskrifna C^m och dessa serskilda $C^n, C_1^n, \dots$ äro då de enda af den ifrågasvarande seriens ytor som gå genom p .

Polarplanerna för en gifven punkt O i afseende på de serskilda ytorna i serien enveloppera följaktligen en yta af klassen $\mu + 2m(n - 1)$; — och dermed är bevisadt, att:

Om C^m är en yta af m :te klassen, hvars tangentkäglor äro af μ :te ordningen, samt $C^n, C_1^n, \dots$ äro ytor af n :te klassen inskrifna i en och samma developpabla yta; så skola polarplanerna för en arbiträr punkt O , i afseende på de serskilda developpabla ytor som äro omskrifna C^m och de serskilda C^n , vara tangentplaner till en developpabel yta af klassen $\mu + 2m(n - 1)$.

6. Om en yta C^n_0 skulle finnas som i k punkter berör tangentkäglan till C^m från O , så har den developpabla ytan, som är omskrifven C^m och C^n_0 , en k :faldig punkt i O , och därför måste, af de i (3) anmärkta grunderna, den af polarplanerna för O , i afseende på förra artiklens developpabla ytor, envelopperade ytan vara af en klass, som är $k - 1$ enheter mindre än förut. D. v. s.

Om bland ytor $C^n, C_1^n, \dots$ af n :te klassen, inskrifna i en och samma developpabla yta, en yta C^n_0 skulle finnas, som i k punkter berör tangentkäglan från en punkt O till en yta C^m af m :te klassen, hvars tangentkäglor äro af μ :te ordningen; så äro polarplanerna för O , i afseende på de serskilda developpabla ytor som äro omskrifva C^m och de serskilda C^n , tangentplaner till en developpabel yta af klassen $\mu + 2m(n - 1) - k + 1$.

Koroll. De ytor $C^n, C_1^n, \dots$ hvilka tangera käglan från O , sammanfalla alla till en enda yta C^n_0 , när denna sednare är inskrifven i den samma tangentkäglen. Då blir $\mu + 2m(n - 1) - k = 0$, och sålunda: polarplanerna för O i afseende på de serskilda developpabla ytor, som äro omskrifna C^m och de serskilda C^n , gå i detta fall alla genom samma räta linie.

7. Bland ytor $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \dots$ af n :te klassen, tangerande samma n^3 planer, finnas i allmänhet $\mu + 3m(n-1)$ ytor C^n , hvardera tangerande ytan C^m af m :te klassen i en punkt, hvars tangentplan går genom en förut gifven punkt. Vi se då om grupperna tangentplaner till C^m i denna ytas serskilda grupper beröringspunkter med ytorna i de serskilda serier $C_0^n, C_1^n, \dots$ som bestå af ytor inskrifna i en developpabel yta af klassen n^2 , omskrifven en bestämd yta C_0^n , att dessa grupper tangentplaner bilda en serie ytor, i hvilken $\mu + 3m(n-1)$ ytor gå genom en i rumden godtyckligt tagen punkt. — Häraf härleder man:

Om C^m är en yta af m :te klassen, och $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \dots$ äro ytor af n :te klassen tangerande samma n^3 planer, och vi betrakta de serskilda grupperna tangentplaner i beröringspunkterna mellan C^m och de serskilda serierna ytor $C_0^n, C_1^n, \dots$, hvardera seriens ytor inskrifna i en developpabel yta omskrifven C_0^n : så blifva polarplanerna i afseende på dessa grupper, för en gifven punkt O , tangentplaner till en developpabel yta af klassen $\mu + 3m(n-1)$;

om två ytor i en af de betraktade serierna skulle tangera C^m i två punkter, hvilkas tangentplaner gå genom O , så blir den envelopperade ytans klass en enhet mindre;

om en developpabel yta, omskrifven C_0^n och C_1^n , skulle tangera C^m i en punkt p , hvars tangentplan går genom O , så sammanfalla två af de C^m tangerande ytorna i serien, bestämd af C_0^n och C_1^n , med den enda som tangerar C^m i p ; och därför blir äfven i detta fall den envelopperade ytans klass en enhet mindre.

Om ytan C_0^n skulle vara inskrifven i tangentkäglan till C^m från O , så finnas $\mu + 3m(n-1)$ developpabla ytor, omskrifna C_0^n och C_1^n eller $C_2^n \dots$, hvilka, hvardera i en punkt, hvars tangentplan går genom O , tangera C^m ; enligt sista satsen blir då i detta fall den envelopperade ytans klass noll, d. v. s. punkten O har ett och samma plan såsom polarplan i afseende på hvarje grupp tangentplaner i beröringspunkterna mellan C^m och hvarje serie ytor $C_0^n, C_1^n, \dots$, inskrifna i en developpabel yta omskrifven C_0^n .

8. Den föregående utvecklingen har till ändamål att framställa sater om skärningspunkterna mellan geometriska ytor och kurvor; dessa erhållas genom korrelativ transformation af de nu bevisade theoremerna. Vid denna transformation har den i (2—4) betraktade developpabla ytan C^m öfvergått i en kurva K_m af m :te ordnin-

gen; ytorna $C^n, C^n_1, \dots$ hafva öfvergått i ytor $C_n, C'_n, \dots$ af n :te ordningen, gående genom samma skärningskurva eller bildande en knippa; samt slutligen polarplanet för O , i afseende på de gemensamma tangentplanerna emellan C^n och C^m , blifvit centrum, respektive ett plan E , till de harmoniska media för skärningspunkterna emellan C_n och K_m . — Man erhåller härmed af (2):

Orten för centra till de harmoniska media, i afseende på ett plan E , för de serskilda systemerna skärningspunkter mellan en kurva K_m af m :te ordningen och de serskilda ytorna i en knippa (C_n, C'_n) , är en kurva af m :te ordningen, som träffar E i samma punkter som den första kurvan.

När E ligger oändligt långt borta, blir hvarje af de nämnda centra ett centrum till medeldistanterna för ett system skärningspunkter, eller, på annat sätt uttryckt, en tyngdpunkt för ett system skärningspunkter, när dessa punkter antagas hafva lika stora massor. Den förra satsen lär oss då, att:

Orten för tyngdpunkterna till de serskilda systemerna skärningspunkter mellan en kurva K_m af m :te ordningen och de serskilda ytorna i en knippa, är en kurva af m :te ordningen, hafvande sina asymptoter parallela med asymptoterna till K_m .

På det sätt vi hafva härledt denna sats, framstår den såsom en följd af den föregående. Denna kan åter lika väl betraktas såsom en följd af den sist gifna, ty genom en homografisk transformation af den sista framträder den första. — På detta samma sätt kunna äfven alla de följande satserna, hvilka nu handla endast om tyngdpunkterna, transformeras till satser om centra för harmoniska media i afseende på ett gifvet plan.

9. Af (3) följer:

Om i en knippa ytor (C_n, C'_n) det finnes en yta, som går genom k af asymptotpunkterna till en kurva K_m af m :te ordningen, så beskrifva tyngdpunkterna, för de serskilda systemerna skärningspunkter mellan K_m och de serskilda C_n , en kurva af ordningen $m - k + 1$.

Koroll. *Om samtliga ytorna i knippan (C_n, C'_n) hafva samma asymptotkurva och sålunda parallela asymptotplaner, ligga tyngdpunkterna, för de serskilda systemerna skärningspunkter mellan K_m och ytorna i knippan, på en och samma räta linie.*

Sålunda då $n = 1$:

Hvarje geometrisk kurva skäres af parallela planer i punktsystemer, hvilkas tyngdpunkter ligga på en rät linie.

10. Af (4) härleder man:

Om k af asymptoterna till en kurva K_m af m :te ordningen äfven äro asymptoter till en af ytorna i en gifven knippa, så beskrifva tyngdpunkterna, för de serskilda systemerna skärningspunkter mellan K_m och de serskilda ytorna i knippan, en kurva af ordningen $m - k$, hvars asymptoter äro parallela med de andra $m - k$ asymptoterna till K_m .

Koroll. Tyngdpunkten för skärningspunkterna mellan en yta och en kurva är äfvenledes tyngdpunkt för skärningspunkterna mellan samma kurva och en andra yta, af samma ordning som den förra, och besittande samma af asymptotplanerna envelopperade yta som denna.

Ty i den af den första och den sednare ytan hestämda knippan finnes en yta, till en del bestående af planet oändligt långt borta, två gånger räknadt; — en yta, som därför tangerar kurvan i samtliga dess asymptotpunkter.

Häraf följer vidare, för det fall att den gifna kurvan är fullständiga skärningskurvan mellan två ytor:

Tyngdpunkten för tre ytors skärningspunkter är äfvenledes tyngdpunkt för skärningspunkterna mellan tre andra ytor, besittande samma af asymptotplanerna envelopperade yta som dessa.

När den gifna kurvan är en plan kurva, erhåller satsen följande uttryck:

Tyngdpunkten för skärningspunkterna mellan två kurvor, liggande i samma plan, är äfvenledes tyngdpunkt för skärningspunkterna mellan den ena kurvan och den andras asymptoter, eller för skärningspunkterna mellan de båda kurvornas asymptoter ¹⁾.

44. Andra satsen i förra artikelns korollarium leder nödvändigt till formler, innehållna i en af LIOUVILLE ²⁾ utförd generalisering af ett theorem af JACOBI. — Vi antaga $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vara equationerna för tre ytor af p :te, q :te och n :te ordningen respektive, samt att $f - \lambda F = 0$, $\varphi - \lambda \Phi = 0$, $\psi - \lambda \Psi = 0$ äro tre ytor af samma ordning som f , φ , ψ respektive, — med λ betecknande en storhet oberoende af koordinaterna x, y, z , hvilka ingå i $f, \varphi, \dots \Psi$. Med x_0, y_0, z_0 beteckna vi koordinaterna för en skärningspunkt mellan $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, samt med $x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0$ koordinaterna för en, den förra punkten närbelägen, skärningspunkt emellan ytorna $f - \delta \lambda \cdot F = 0$, $\varphi - \delta \lambda \cdot \Phi = 0$, $\psi - \delta \lambda \cdot \Psi = 0$. Då måste:

¹⁾ LIOUVILLE: Memoire sur quelques propositions générales de géométrie, Journal de Math. p. Liouville. Première série T. VI. sid. 371.

²⁾ Ofvan citerad afhandling.

$$f'(x_0) \cdot \delta x_0 + f'(y_0) \cdot \delta y_0 + f'(z_0) \cdot \delta z_0 - \delta \lambda \cdot F_0 = 0,$$

$$\varphi'(x_0) \cdot \delta x_0 + \varphi'(y_0) \cdot \delta y_0 + \varphi'(z_0) \cdot \delta z_0 - \delta \lambda \cdot \Phi_0 = 0,$$

$$\psi'(x_0) \cdot \delta x_0 + \psi'(y_0) \cdot \delta y_0 + \psi'(z_0) \cdot \delta z_0 - \delta \lambda \cdot \Psi_0 = 0;$$

och sålunda:

$$\begin{aligned} \delta x_0 &= \frac{\Sigma \pm F_0 \cdot \varphi'(y_0) \cdot \psi'(z_0)}{\Sigma \pm f'(x_0) \cdot \varphi'(y_0) \cdot \psi'(z_0)} \cdot \delta \lambda, \\ (A) \dots\dots\dots \delta y_0 &= \frac{\Sigma \pm f'(x_0) \cdot \Phi_0 \cdot \psi'(z_0)}{\Sigma \pm f'(x_0) \cdot \varphi'(y_0) \cdot \psi'(z_0)} \cdot \delta \lambda, \\ \delta z_0 &= \frac{\Sigma \pm f'(x_0) \cdot \varphi'(y_0) \cdot \Psi_0}{\Sigma \pm f'(x_0) \cdot \varphi'(y_0) \cdot \psi'(z_0)} \cdot \delta \lambda. \end{aligned}$$

När F, Φ, Ψ äro funktioner af x, y, z af gradtal mindre eller lika med $p-2$, $q-2$, $n-2$ respektive; och $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots x_{pqn}, y_{pqn}, z_{pqn}$ äro koordinaterna för skärningspunkterna emellan $f - \lambda F = 0, \varphi - \lambda \Phi = 0, \psi - \lambda \Psi = 0$: så är, enligt andra satsen i föregående artikels korollarium, summan

$x_1 + x_2 + \dots x_{pqn} =$ konstant för alla ytor i knipporna $f - \lambda F = 0, \varphi - \lambda \Phi = 0, \psi - \lambda \Psi = 0$, och på samma sätt: $y_1 + y_2 + \dots y_{pqn} =$ konst., $z_1 + z_2 + \dots z_{pqn} =$ konst. D. v. s. $\Sigma \delta x = 0, \Sigma \delta y = 0, \Sigma \delta z = 0$, och sålunda enligt (A):

$$(B) \dots\dots\dots \Sigma \frac{\Sigma \pm F \cdot \varphi'(y) \cdot \psi'(z)}{\Sigma \pm f'(x) \cdot \varphi'(y) \cdot \psi'(z)} = 0, \text{ etc.}$$

när summan utsträcker till samtliga skärningspunkterna mellan $f=0, \varphi=0, \psi=0$.

Koroll. Vi antaga $\varphi=0, \psi=0$ vara första polarer, respektive $f=0$, för punkterna oändligt långt borta på Y - och Z -axeln; vidare låta vi Φ, Ψ vara identiska med noll. Equationen (B) öfvergår då att blifva:

$$\Sigma \frac{F}{f'(x)} = 0,$$

när summan utsträcker till samtliga skärningspunkterna mellan $f=0, f'(y)=0,$

$f'(z)=0$, och när F är ett polynom af gradtalet $p-2$. Välja vi F att vara $\frac{d^2 f}{dy^2}$

och erinra oss att $f'(x): \frac{d^2 f}{dy^2}$ är krökningsradie i punkten x, y, z till ytans skärningskurva med ett plan parallellt med xy -planet, så bevisar den föregående equationen att:

Om man till en geometrisk yta af m:te klassen, som saknar dubbelpunkter, drager dess m med ett gifvet plan parallela tangentplaner, och genom deras beröringspunkter planer parallela med ett andra plan, vinkelrät mot det första; så besitta ytans skärningskurvor med dessa planer i de nämnda beröringspunkterna krökningsradier, hvilkas inverterade värden hafva en summa lika med noll.

Drager man genom de nämnda beröringspunkterna en andra serie planer, vinkelräta mot de två föregående riktningsplanerna, samt ihågkommer att summan af inverterade värdena för krökningsradierna i en punkt på en yta till dennas skärningskurvor med två mot hvarandra vinkelräta normalplaner är oberoende af dessa normalplaners riktningar, och är uttrycket för ytans totala krökning i punkten; så finner man af den förra satsen, att:

Om till en geometrisk yta af m:te klassen, som saknar dubbelpunkter, dragas dess m med ett gifvet plan parallela tangentplaner, försvinner summan af ytans totala krökningar i beröringspunkterna ¹⁾.

12. Om i equationerna (A) vi låta Φ och Ψ vara identiska med noll, blir:

$$\delta x = \frac{F[\varphi'(y) \cdot \psi'(z) - \varphi'(z) \cdot \psi'(y)]}{\Sigma \pm f'(x) \cdot \varphi'(y) \cdot \psi'(z)} \cdot \delta \lambda; \text{ etc.}$$

Om F är af graden $p - 1$, hafva alla ytorna i knippan $f - \lambda F = 0$ samma asymptotkurva och skära sålunda (9 *Koroll.*) kurvan $\varphi = 0$, $\psi = 0$ i punktsystemer, hvilkas tyngdpunkter beskrifva en rät linie. Emedan nu hvarje yta i den gifna knippan svarar mot en bestämd punkt såsom tyngdpunkt för ytans skärningspunkter med kurvan, och omvänt hvarje punkt på orten för tyngdpunkterna, som ej är en multipelpunkt på orten, svarar mot en enda yta i knippan, så måste i detta fall, då orten är en rät linie och sålunda ej har multipelpunkter, nödvändigt hvarje punkt på linien bestämma en enda yta i knippan. De serskilda ytorna i knippan äro dermed homografiska med de serskilda tyngdpunkterna, så att anharmoniska förhållandet emellan fyra ytor är lika med anharmoniska förhållandet emellan motsvarande tyngdpunkter. Tyngdpunkten oändligt långt borta kan ej motsvara någon annan yta än den, som sjelf skär $\varphi = 0$, $\psi = 0$ i en punkt oändligt långt borta, det är ytan som består af $F = 0$ och planet oändligt långt borta, — ytan motsvarande värdet

¹⁾ LIOUVILLE: c. afh. sid. 403. — Jag begagnar tillfället att här gifva rättelse åt tvenne satser, som äro framställda i "Några satser om plana algebr. kurvors Normaler" Lunds Univ. Årsskr. 1869. sidd. 27, 38 beträffande summan af inverterade värdena för en plan geometrisk kurvas krökningsradier i de punkter, hvilkas tangenter äro parallela eller gå genom en och samma punkt. Satsen sid. 27 skall vara: "Om till en plan kurva af *m*:te klassen, som saknar dubbelpunkter och spetsar, man drager *m* med en gifven riktnings parallela tangenter, är alltid summan af inverterade värdena för beröringspunkternas krökningsradier lika med noll"; första satsen sid. 38: "Om till en plan kurva, som saknar dubbelpunkter och spetsar, man drager dess tangenter från en punkt *o*, om $m_1, m_2, \dots$ äro beröringspunkterna, $R_1, R_2, \dots$ kurvans krökningsradier i beröringspunkterna; är $\frac{om^3_1}{R_1} + \frac{om^3_2}{R_2} + \dots = 0$ ". Den första satsen är framställd af Liouville i den citerade afhandlingen och bevisas på samma sätt som den ofvan anförda satsen om ytorna.

$\lambda = \infty$. Kallar man A, B, C de tyngdpunkter, som motsvara värdena $\lambda = 0$, $\lambda = \mu$, $\lambda = \lambda$; så erhåller man:

$$\frac{CA}{BA} = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ eller } CA = \text{konst.} \times \lambda.$$

Utmärkas med ξ, η, ζ koordinaterna för C, finner man då:

$$\delta\xi = a. \delta\lambda, \delta\eta = b. \delta\lambda, \delta\zeta = c. \delta\lambda,$$

när med a, b, c betecknas konstanta storheter, oberoende af λ .

Nu äro åter $\delta\xi = \Sigma \delta x$, $\delta\eta = \Sigma \delta y$, $\delta\zeta = \Sigma \delta z$, och derföre enligt den i början af denna artikel uppställda equationen:

$$\Sigma \frac{F[\varphi'(y) \psi'(z) - \varphi'(z) \psi'(y)]}{\Sigma \pm [f'(x) - \lambda F'(x)] \varphi'(y) \cdot \psi'(z)} \text{konst.}, =$$

oberoende af λ , när F är af ett gradtal en enhet lägre än f . — Vi erhålla två andra liknande formler ur uttrycken (A) för $\delta y, \delta z$.

Koroll. Skrifver man $F = f'(x)$, med ω förstår den vinkel, normalen i punkten x, y, z till $f = 0$ bildar med X-axeln; med α den vinkel, tangenten i samma punkt till kurvan $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bildar med X-axeln, och slutligen kallar V vinkeln mellan den nämnda tangenten och normalen: så blir den föregående summan lika med

$$\Sigma \frac{\cos \omega \cdot \cos \alpha}{\cos V}. \text{ — Denna summa, utsträckt öfver samtliga skärningspunkterna mel-}$$

lan $\varphi = 0, \psi = 0$ och en yta i knippan $f - \lambda \cdot f'(x) = 0$, är sålunda konstant densamma för alla ytorna i den sista knippan.

Anmärkning. Den föregående satsen kan uttryckas något allmänare på följande sätt:

$$\Sigma \frac{\Sigma \pm F[\varphi'(y) - \lambda \varphi'(y)] [\psi'(z) - \lambda \psi'(z)]}{\Sigma \pm [f'(x) - \lambda F'(x)] [\varphi'(y) - \lambda \varphi'(y)] [\psi'(z) - \lambda \psi'(z)]}, \text{ utsträckt}$$

öfver samtliga skärningspunkterna mellan $f - \lambda F = 0$, $\varphi - \lambda \Phi = 0$, $\psi - \lambda \Psi = 0$, är oberoende af λ , när F, Φ, Ψ äro af gradtal minst en enhet lägre än gradtalen för f, φ, ψ respektive.

13. Vi framgå nu till den korrelativa transformationen af satserna (6—7). — Den i dessa artiklar förevarande ytan C^m öfvergår vid transformationen till en yta C_m af m :te ordningen, hvars plana skärningskurvor äro af μ :te klassen; ytorna $C^n, C_{n_1} \dots$ i (7) öfvergå i ytor $C_n, C_{n_1} \dots$ af n :te ordningen genom samma n^3 punkter och sålunda bildande ett geometriskt nät. Slutligen, om man i den transformerade figuren låter planet oändligt långt borta motsvara punkten O i den första figuren, kommer polarplanet för O i afseende på developpabla ytan, omskrifven C^m

och C_n , i den första figuren, att, i den transformerade figuren, motsvara tyngdpunkten för beröringspunkterna mellan en skärningskurva ($C_m C_n$) och dess samtliga med ett arbiträrt plan parallela tangentplaner, — en punkt, hvars läge är oberoende af det arbiträra planets riktning och som får namn af skärningskurvans *centrum*. — Man erhåller härmed af (5):

Orten för centra till skärningskurvorna mellan en yta C_m af m :te ordningen, hvars plana skärningskurvor äro af μ :te klassen, och de serskilda ytorna $C_n, C'_n \dots$ af n :te ordningen i en knippa, är en kurva af ordningen $\mu + 2m(n - 1)$.

Häraf då $n = 1$:

Orten för centra till skärningskurvorna mellan planer genom en rät linie och en yta, hvars plana skärningskurvor äro af μ :te klassen, är en geometrisk kurva af μ :te ordningen.

Af (6) följer:

Om en af skärningskurvorna ($C_m C_n$) i k punkter berör oändligheten (eller i k punkter är parabolisk), så är orten för skärningskurvornas centra en kurva af ordningen $\mu + 2m(n - 1) - k + 1$.

Af (6 Koroll.):

Om i den gifna knippan det finnes en yta, gående genom ytans C_m asymptotkurva, så är orten för centra till skärningskurvorna mellan C_m och de öfriga ytorna i knippan en rät linie.

Koroll. För $n = 1$ erhåller denna sats följande uttryck:

Skärningskurvorna mellan en geometrisk yta och parallela planer hafva sina centra på en rät linie.

Antaga vi att en af ytorna i knippan (C_n, C'_n) består till en del af planet oändligt långt borta, så måste enligt fjerde satsen i denna artikel skärningskurvorna mellan C_m och ytorna i knippan hafva sina centra på en rät linie R . Vi se om dessa centra, på samma sätt som i (12), att de äro homografiska med ytorna och sålunda homografiska med tyngdpunkterna för ytornas skärningspunkter med R . Teckna vi de ifrågavarande centra med a och de sistnämnda tyngdpunkterna med b , så måste — då nu vidare en oändligt bort belägen punkt a nödvändigt motsvarar ytan, innehållande planet oändligt långt borta och dermed en oändligt bort belägen punkt b — mellan afstånden af en fast punkt o på R från motsvarande a, b en equation bestå af formen: $oa + \varrho \cdot ob + \sigma = 0$, hvarest ϱ, σ äro konstanter.

Häraf följer att om ob är konstant, äfven oa är oföränderlig; sålunda (10 Koroll):

Ytor, hvilka hafva samma developpabla yta envelopperad af asymptotplanerna, skära en geometrisk yta, hvilken som helst, i kurvor med samma centrum.

14. Af (7) erhåller man:

Om en yta C_m af m :te ordningen, hvars plana skärningskurvor äro af μ :te klassen, samt ett nät ytor (C_n^0, C_n', C_n'') af n :te ordningen äro gifna, och man betraktar de serskilda knippor i nätet, hvilkas basiskurvor ligga på C_n^0 ; så finner man om de serskilda grupperna beröringspunkter mellan C_m och ytorna i de serskilda af de förutnämnda knipporna (C_n^0, C_n'), att deras tyngdpunkter beskrifva en kurva af ordningen $\mu + 3m(n - 1)$.

Om C_n^0 går genom ytans C_m asymptotkurva, och man betraktar de serskilda knippor i nätet (C_n^0, C_n', C_n''), hvilkas basiskurvor ligga på C_n^0 ; så finner man om de serskilda grupperna beröringspunkter mellan C_m och de serskilda knipporna, att de hafva en och samma punkt såsom tyngdpunkt.

Denna sats är en generalisering af den genom CHASLES i Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie (Mémoires couronnés de l'Académie royale de Bruxelles, T. XI, 1837 p. 624) framställda satsen om oföränderligheten hos tyngdpunkten för beröringspunkterna mellan en geometrisk yta och dess med ett gifvet plan parallela tangentplaner. När $n = 1$ erhålles denna sats af den föregående.

15. En konsekvens af theoremet: "Hvarje yta af ordningen $n \geq m + m' - 3$, som går genom $mm'n - \frac{mm'(m+m'-4)}{2} - 1$ punkter på skärningskurvan emellan två ytor af ordningen m, m' , träffar denna kurva ytterligare i desamma $\frac{mm'(m+m'-4)}{2} + 1$ punkterna." ¹⁾

Enligt detta theorem kunna genom $mm'n - \nu \cdot r$ punkter på skärningskurvan K emellan två ytor af m :te och m' :te ordningen läggas ytor af n :te ordningen ($n \geq m + m' - 3$), hvilka i ν andra punkter hafva en r :punktig beröring med K, när $\nu \geq p$ och $p = \frac{mm'(m+m'-4)}{2} + 1$.

Om A, B, C, ... äro $r - 1$ dylika ytor och genom deras serskilda grupper af ν beröringspunkter samt genom de nämnda $mm'n - \nu \cdot r$ fasta punkterna på K lägges en yta V af n :te ordningen, så skäres densamma af K i ytterligare ν punkter

¹⁾ JACOBI: Theoremata de punctis intersectionis duarum curvarum etc. Crelles Journ. Bd. 15. s. 305. PLÜCKER: System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1852, s. 44.

(V). Vi draga en yta af n :te ordningen, som går genom de $mm'n - \nu \cdot r$ fasta punkterna på K , som har en r :punktig beröring med samma kurva i $\nu - p$ af punkterna (V) och en $r - 1$:punktig beröring i de återstående p af punkterna (V). Dess öfriga skärningspunkter med K äro, enligt det citerade theoremet, genom dessa $mm'n - \nu \cdot r + (\nu - p) \cdot r + p(r - 1) = mm'n - p$ punkter fullkomligt bestämda. Den sednare ytan kalla vi U .

Emedan de båda ytorna af n :te ordningen, ytan V räknad r gånger och komplexen $A. B. C. \dots U$, skära hvarandra i punkter, af hvilka, enligt ytornas konstruktioner,

$$r(mm'n - \nu \cdot r) + r(r - 1) \cdot \nu + r(\nu - p) + (r - 1)p = r \cdot mm'n - p$$

ligga på K : så måste, enligt det anförda theoremet, de p öfriga skärningspunkterna emellan K och U sammanfalla med de p återstående skärningspunkterna emellan K och V , räknad r gånger. Här af följer att ytan U har en r :punktig beröring med K i samtliga de ν punkterna (V); d. v. s.:

Om $r - 1$ grupper af r :punktiga beröringspunkter emellan K och ytor af n :te ordningen ($n \geq m + m' - 3$), gående genom $mm'u - \nu r$ (der $\nu \geq \frac{mm' (m + m' - 4)}{2} + 1$) fasta punkter på K , äro gifna; och genom dessa grupper samt de nämnda fasta punkterna på K lägges någon yta af n :te ordningen, så träffas K af densamma ytan i ytterligare ν punkter, hvilka utgöra en ny grupp af r :punktiga beröringspunkter emellan K och en yta af n :te ordningen genom de nämnda fasta punkterna på K . (CLEBSCH: Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie, Crelles Journ. Bd. 63 s. 232).

Emedan ytans V skärningspunkter (V) äro bestämda genom $\nu - p$ bland dem, kan densamma ytan bestämma endast en grupp af p punkter med r :punktig beröring till de ytor af n :te ordningen, som kunna dragas genom de $mm'n - \nu r$ fasta punkterna på K , så att de med kurvan hafva en r :punktig kontakt i $\nu - p$ andra bestämda punkter och att de tangera densamma r :punktigt i p andra, ej på förhand bestämda, punkter. Genom $r - 1$ grupper af r :punktiga beröringspunkter med ytor af n :te ordningen, gående genom $mm'n - \nu r$ (der $\nu > p$) fasta punkter på K , konstrueras på det anförda sättet de öfriga grupperna r :punktiga beröringspunkter, af ν punkter i hvarje grupp, till endast ett visst system ytor genom de första punkterna; af ytor i samma system kunna aldrig två hafva r :punktig kontakt med K i desamma $\nu - p$ punkterna på kurvan. — Det finnes lika många systemer ytor, som det finnes grupper af p punkter, hvilka äro

r :punktiga beröringspunkter emellan K och ytor af n :te ordningen, som gå genom $mm'n - vr$ fasta punkter på K och som beröra densamma r :punktigt i $\nu - p$ andra fasta punkter.

Om $A, B, C, \dots$ äro $r - 1$ ytor i ett och samma system, samt man genom de $mm'n - vr$ fasta punkterna på K , genom beröringspunkterna med den förut konstruerade U och genom beröringspunkterna mellan K och de $r - 2$ ytorna $B, C, \dots$, lägger ytor V , så träffa dessa ytor kurvan K i dess serskilda grupper beröringspunkter med ytorna i samma system som $A, B, \dots$. Häraf följer att beröringspunkterna till en och samma yta U kunna likväl konstrueras medelst en yta V , lagd genom beröringspunkterna till $r - 1$ andra ytor, hvilka som helst i systemet $A, B, \dots$. En yta, som, dragen genom de förut gifna fasta punkterna på K , har en $r - 1$ punktig kontakt med K i dess ν beröringspunkter med A , är en dylik yta V , — konstruerad nemligen genom beröringspunkterna för $r - 1$ oändligt närbelägna eller med A sammanfallande ytor i systemet; hvarje sådan yta skär sålunda K i dess beröringspunkter med ytor tillhörande samma system som U . Ytan A själf är en dylik yta V och derfore samma A en yta i systemet U ; denna sednare tillhör då samma system som $A, B, C, \dots$. Detta bevisar att:

De r grupperna r :punktiga beröringspunkter af ν punkter emellan K och r ytor af n :te ordningen i samma system ligga alltid på en yta af n :te ordningen, hvilken, liksom de nu nämnda, går genom $mm'n - vr$ fasta punkter på K . (CLEBSCH l. c.).

§. II. Om en geometrisk kurvas sista polar i afseende på en gifven yta.

16. Sista polaren för en geometrisk kurva K , i afseende på en yta C , är den developpabla yta som envelopperas af polarplanerna, i afseende på C , för punkterna på K såsom poler; och dermed ort för de punkter, hvilkas första polarer, respektive C , tangera K . Af dessa egenskaper hos sista polaren är tydligt, att dess dubbelkurva är orten för de punkter, hvilkas första polarer, i afseende på C , hafva en dubbel beröring med K , och att dess kuspidualkurva innehåller polerna, respektive C , till första polarerna som oskulera K .

Sålunda, då nu första polarerna för punkterna i ett plan bilda ett nät och första polarerna för punkterna på en rät linie bilda en knippa, blifva ordningstalen för sista polaren, för dess dubbel- och kuspidualkurva utmärkta genom antalet ytor i en polarknippa, som tangera K , antalen ytor i ett polarnät, som hafva en dubbel beröring och en oskulation med K . — Dessa tal skola vi söka bestämma, sedan

först några dertför erforderliga egenskaper hos JACOBIS yta för fyra gifna ytor blitvit omnämnda.

17. Jacobis yta för fyra ytor är orten för de punkter, hvilkas polarplaner i afseende på de fyra ytorna träffa hvarandra i samma punkt. Om $C_m, C_{m'}, C_n, C'_n$ äro de fyra gifna ytorna och de två första äro af ordningstalen m, m' respektive, de två sednare åter af samma ordning n , samt K är skärningskurvan ($C_m C_{m'}$); så äro skärningspunkterna emellan K och Jacobis yta beröringspunkterna mellan K och ytorna i knippan ($C_n C'_n$). Bland dem äro likväl då äfven dubbelpunkterna och spetsarne på K inberäknade. En dubbelpunkt på K är en enkel beröringspunkt mellan C_m och $C_{m'}$, och hvarje sådan punkt, såsom hafvande samma plan såsom polarplan respektive C_m och $C_{m'}$, tillhör Jacobis yta enligt dess definition. En spets på K är åter en stationär beröringspunkt eller ort för två närbelägna enkla beröringspunkter mellan C_m och $C_{m'}$, tillfölje hvaraf, enligt det nyss nämnda, Jacobis yta måste träffa K i hvarje spets och en densamma närbelägen punkt. — D. v. s.:

Jacobis yta för $C_m, C_{m'}$ och två andra ytor, hvilka som heldst, går genom dubbelpunkterna och spetsarne på kurvan ($C_m C_{m'}$), samt tangerar densamma i de sednare punkterna.

När kurvan ($C_n C'_n$) träffar K i en punkt, vare sig denna punkt är enkel, dubbelpunkt eller spets, kommer Jacobis yta att gå genom densamma. Denna punkt kan uppträda såsom en mångfaldig skärningspunkt mellan K och Jacobis yta, i detta fall representerande lika många beröringspunkter mellan K och ytor i knippan (C_n, C'_n). Graden af dess mångfaldighet kan ej bero af annat än af dessa sednare figurers beskaffenheter i skärningspunkten, ty de öfriga egendomligheterna hos dem kunna endast modifiera antalet och läget af deras öfriga beröringspunkter. Då kunna, för bestämningen af den ifrågavarande punktens mångfaldighet, kurvan K och knippan (C_n, C'_n) ersättas med en annan kurva och en annan knippa ytor, hvilka i densamma punkten hafva samma beskaffenheter som de förra; och dermed af egenskapen hos Jacobis yta för den nya figuren, egenskapen hos Jacobis yta för den ursprungliga härledas.

I. Om basiskurvan till knippan (C_n, C'_n) träffar K i en punkt o , skall Jacobis yta för $C_m, C_{m'}, C_n, C'_n$ tangera K i punkten o .

Ty, när (C_n, C'_n) är en knippa planer, hvars axel träffar K i o , gäller denna och en närbelägen punkt på K såsom tangeringspunkter för två planer genom knippans axel; — härmed måste Jacobis yta gå genom o och nästgränsande punkt, d. v. s. i o tangera K .

II. När K är en konisk sektion och (C_n, C'_n) är en knippa ytor af andra ordningen, samtliga tangerande K i o , skäres K af hvarje yta i knippan i ännu två punkter, hvilkas räta sammanbindningslinier gå genom en och samma punkt. Beröringspunkterna till de två tangenter, som från den sista punkten kunna dragas till K , äro beröringspunkterna till de enda ytor i knippan, som i en annan punkt än o , tangera K .

Häraf och af den omständigheten att Jacobis yta för denna figur är af tredje ordningen följer att o gäller såsom fyra beröringspunkter.

Lemnande K arbiträr, men för knippan (C_n, C'_n) väljande en knippa planer, hvars axel tangerar K i o , finna vi orten, som genereras af skärningskurvan emellan, samma punkt på knippans axel såsom pol motsvarande första polarer, respektive de båda ytor som skära hvarandra i K , vara Jacobis yta för denna figuren. Emedan samtliga de genererande ytorna hafva o gemensam, blir denna punkt en dubbelpunkt för Jacobis yta.

Af de nu gjorda två bestämningarne följer att:

Om knippans (C_n, C'_n) basiskurva tangerar K i en punkt o , har Jacobis yta för $C_m, C_{m'}$ och den nämnda knippan en dubbelpunkt i o , med en af sina grenar derstädes oskulerande K .

III. Om K är en plan kurva med en dubbelpunkt i o , och (C_n, C'_n) är en knippa planer gående genom o , erhåller första polaren för o respektive kurvan, som nu är skärningen mellan Jacobis yta och kurvans plan, två grenar genom o , derstädes tangerande grenarne till K . — Häraf:

Om knippans (C_n, C'_n) basiskurva går genom en dubbelpunkt på K , oskulerar Jacobis yta för $C_m, C_{m'}, C_n, C'_n$ i denna samma punkt de båda grenarne till K .

IV. Om knippans (C_n, C'_n) basiskurva tangerar K i en spets o , skäres C_m af Jacobis yta för $C_m, C_{m'}, C_n, C'_n$ i en kurva med tre grenar genom o , af hvilka de två i samma punkt tangera K .

Jacobis kurva för en plan kurva med en spets i o , samt en knippa kurvor liggande i den förras plan och samtliga tangerande återvändstangenten, har tre grenar genom o med de två grenarne derstädes tangerande den första kurvans grenar ¹⁾. Detta bevisar att o gäller såsom åtta beröringspunkter. — Lemnande K arbiträr och för (C_n, C'_n) väljande en knippa planer genom återvändstangenten, finna vi

¹⁾ CREMONA: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Deutsch v. CURTZE Greifswald 1865 s. 139.

Jacobis yta för denna figuren skära hvardera af ytorna genom K i en kurva med tre grenar genom spetsen. — Häraf den uppställda satsen.

18. Emedan tangeringspunkterna mellan kurvan $(C_m C_{m'}) = K$ och ytorna i knippan (C_n, C'_n) ligga på Jacobis yta, denna sednare åter är af ordningen $m + m' + 2n - 4$ samt innehåller kurvans dubbelpunkter och spetsar på det sätt som i förra artikeln blifvit nämdt; så följer:

I en knippa ytor af n :te ordningen finnas i allmänhet $mm'(m + m' + 2n - 4) - 2\delta - 3\kappa$ ytor, tangerande skärningskurvan mellan två ytor af m :te och m' :te ordningen respektive, hvilka i δ punkter hafva en enkel och i κ punkter en stationär beröring med hvarandra.

Huru detta antal förminskas när knippans basiskurva träffar K , framgår af satserna I—IV i förra artikeln. Vi uttrycka här endast konsekvensen af II: *om kurvan $(C_n C'_n)$ tangerar kurvan $(C_m C_{m'})$, i en punkt, så är i allmänhet antalet af de ytor i knippan (C_n, C'_n) , hvilka i ännu en annan punkt tangera kurvan, lika med $mm'(m + m' + 2n - 4) - 4 - 2\delta - 3\kappa$.*

19. Till den förut betraktade knippan (C_n, C'_n) af n :te ordningen foga vi en ny yta C''_n af samma ordning, och betrakta de serskilda knipporna i nätet (C_n, C'_n, C''_n) , hvilkas basiskurvor ligga på C_n . De serskilda Jacobis ytor för $C_m, C_{m'}$ och dessa serskilda knippor gå alla genom samma skärningskurva eller bilda en knippa, ty skärningskurvan mellan två af dem, bestående af tvenne delar: den ena delen varande ort för de punkter, hvilkas polarplaner i afseende på $C_m, C_{m'}, C_n$ gå genom samma linie, den andra delen ort för de punkter, hvilkas polarplaner i afseende på $C_m, C_{m'}, C_n, C'_n, C''_n$ gå genom samma punkt, tillhör enligt denna dess egenskap hvarje af de ifrågavarande Jacobis ytor.

Emedan deras knippas basiskurva går genom dubbelpunkterna och spetsarne på $K = (C_m, C_{m'})$ och tangerar densamma i de sednare punkterna, så följer af (17, satserna III, IV) att Jacobis yta för denna knippa och för $C_m, C_{m'}$ skär K i andra punkter af ett antal: $mm'(3m + 3m' + 4n - 12) - 6\delta - 8\kappa$, utgörande tangeringspunkter mellan K och ytorna i knippan. — Bland dessa punkter äro skärningspunkterna mellan K och C_n inberäknade, ty hvardera af dem bestämmer en knippa i nätet, hvars basiskurva ligger på C_n och träffar K , i afseende på hvilken knippa Jacobis yta (17, sats I) sålunda tangerar K . De återstående $3mm'(m + m' + n - 4) - 6\delta - 8\kappa$ beröringspunkterna mellan K och de i början af artikeln nämnda Jacobis ytor bestämna ytor i nätet, som i två på hvarandra följande punkter tangera K , d. ä. som, hvardera i en dylik punkt, oskulera K . — Sålunda:

I ett geometriskt nät ytor af n :te ordningen finnas i allmänhet $3mm'(m+m'+n-4) - 6\delta - 8x$ ytor, oskulerande en skärningskurva mellan två gifna ytor af m :te och m' :te ordningen, hvilka i δ punkter hafva en enkel och i x punkter en stationär beröring med hvarandra.

20. Det finnes oändligt många knippor i ett lineärt system ¹⁾ ytor af n :te ordningen, hvilkas basiskurvor ligga på en och samma yta C_n i systemet; och Jacobis ytor, som motsvara dessa knippor, bilda ett geometriskt nät, — ty genom två arbiträra punkter p, p' kan endast en dylik yta läggas. Vi se nemligen att polarplanerna för p respektive $C_m, C_{m'}, C_n$ skära hvarandra i en punkt o , bestämmande ett nät i systemet, respektive samtliga hvars ytor polarplanerna för p gå genom o ; och att polarplanerna för p' på samma sätt bestämma en punkt o' och ett andra nät ytor i systemet. Den för dessa två nät gemensamma knippan (C_n, C'_n) är då den enda knippa i systemet, hvars basiskurva ligger på C_n , och respektive hvilken Jacobis yta går genom p och p' .

Ytorna i det af de nämnda Jacobis ytor bildade nätet gå samtliga genom dubbelpunkterna på K och tangera densamma kurvan i dess spetsar. Af den föregående artikeln följer att $3mm'(2m+2m'+2n-8) - x\delta - yx$ ytor i nätet oskulera K ; — om x, y utmärka graden af mångfaldigheten hos hvarje dubbelpunkt och spets för ett nät af den nämnda beskaffenheten. Frånräknas skärningspunkterna mellan K och C_n , hvardera bestämmande en oändlighet knippor i systemet, hvilkas basiskurvor ligga på C_n , och sålunda (17, sats I) en knippa Jacobis ytor i nätet, hvars basiskurva tangerar K , hvardera skärningspunkten derföre räknad såsom två oskulationspunkter: så återstå $2mm'(3m+3m'+2n-12) - x\delta - yx$ andra oskulationspunkter mellan K och ytor i det nämnda nätet af Jacobis ytor. — Desamma äro fyrpunktiga beröringspunkter mellan K och ytor i det förstnämnda systemet. Deras antal bestämmes framdeles (27) och då på samma gång värdena för x och y , att $x = 12, y = 15$.

21. Om skärningen mellan C_m och $C_{m'}$ består af flera kurvor, om K är den ena kurvan och denna är af ordningen μ samt har δ dubbelpunkter, x spetsar och träffar skärningkurvans andra beståndsdelar i t punkter; blir ordningen för den af kurvans K tangenter genererade ytan eller klassen för K lika med $\nu = \mu(m+m'-2) - t - 2\delta - 3x$; och sålunda enligt (18, 19):

¹⁾ Om $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0$ äro equationerna för fyra ytor af samma ordning, bestämma de ett lineärt system, eller såsom vi i det följande kortligen säga, ett system, hvarest hvarje annan yta är uttryckt genom en equation af formen: $\lambda A + \mu B + \nu C + \varrho D = 0$.

Antalet af i en knippa ytor af n :te ordningen befintliga ytor, som tangera en geometrisk kurva af μ :te ordningen och ν :te klassen, är $2\mu(n-1)+\nu$;

antalet ytor af n :te ordningen i ett geometriskt nät, som oskulera en geometrisk kurva af μ :te ordningen, ν :te klassen och besittande α spetsar, är $3\mu(n-2)+3\nu+\alpha$.

22. Här var dock förutsatt om knippans basiskurva och nätets basispunkter, att ej någon af de nämnda singuliära punkterna på K tillhör dem. — Antaga vi att knippans basiskurva går genom kurvans K dubbelpunkter och dess skärningspunkter med de öfriga delarne af $(C_m C_{m'})$, och att densamma tangera K i dess spetsar; så följer af (17, sats. III, IV) att i detta fall endast $2\mu(n-1)+\nu-2t-4\delta-3\alpha$ ytor i knippan finnas som tangera K ; — den yta frånräknad som kan dragas oskulerande kurvan i en spets.

Om det geometriska nätet är af samma beskaffenhet som det i (20) behandlade nätet af Jacobis ytor, d. v. s. om samtliga ytorna i ett geometriskt nät gå genom kurvans K dubbelpunkter och genom dess skärningspunkter med de öfriga delarne af skärningskurvan $(C_m C_{m'})$, samt tangera K i dess spetsar; finnas i allmänhet $3\mu(n-2)+3\nu-3t-6\delta-6\alpha$ ytor i nätet som oskulera K . — Dock äro häri ej inberäknade de ytor, hvilka i en dubbelpunkt eller spets på K kunna dragas oskulerande kurvan.

23. Af den första i (16) gifna karakteren för kurvans K sista polar, i afseende på en yta C_{n+1} af $n+1$:sta ordningen, att densamma är envelopp af polarplanerna, respektive C_{n+1} , för punkterna på K , följer att de tangentplaner, som till polaren kunna dragas från en gifven punkt, äro polarplanerna för skärningspunkterna mellan K och den gifna punktens första polar respektive C_{n+1} ; att sålunda:

Sista polaren, i afseende på en yta af $n+1$:sta ordningen, för en geometrisk kurva af μ :te ordningen är af klassen μn .

Af den ytterligare i (16) utförda bestämningen af polaren och af satserna i (21) framgår att:

Sista polaren, i afseende på en yta af $n+1$:sta ordningen, för en geometrisk kurva af μ :te ordningen, ν :te klassen och besittande α spetsar, är en developpabel yta af ordningen $2\mu(n-1)+\nu$, hafvande en kuspidualkurva af ordningen $3\mu(n-2)+3\nu+\alpha$.

I det följande skola vi kortligen med K förstå en kurva af den här nämnda beskaffenheten, och med C_{n+1} ytan af $n+1$:sta ordningen, i afscende på hvilken polaren för K tänkes genererad.

24. Ett arbiträrt plan skär sista polaren i en kurva, hvars ordning och klass äro lika med polarens ordning och klass respektive, hvars spetsar äro planets skärningspunkter med kuspidakurvan och hvars dubbelpunkter slutligen äro planets skärningspunkter med dubbelkurvan. Medelst PLÜCKERS formler för de plana kurvornas singulariteter finner man antalet af skärningskurvans dubbelpunkter vara

$2\mu(n-1) \cdot [\mu(n-1) + \nu] - 6\mu n + 10\mu + \frac{1}{2}\nu^2 - 3\nu - \frac{3}{2}\kappa$; — sålunda:

Kurvans K sista polar, respektive C_{n+1} , har en dubbelkurva af ofvanstående ordningstal.

Anm. Detta tal utmärker ock antalet ytor af n :te ordningen i ett geometriskt nät, hvilka med K hafva en dubbel beröring.

25. Af sista satsen i (18) framgår att på hvarje generatrice till den developabla ytan, som är sista polaren för K , finnas $2\mu(n-1) + \nu - 4$ punkter, hvilkas första polarer, respektive C_{n+1} , i två differenta punkter tangera K ; d. v. s. *hvarje generatrice till sista polaren för K träffar polarens dubbelkurva i $2\mu(n-1) + \nu - 4$ punkter.*

26. Den i (24) betraktade plana skärningskurvan med sista polaren har κ inflexionstangenter, hvilka äro planets skärningslinier med vändtangentsplanerna för sista polaren: *Kurvans K sista polaryta, respektive C_{n+1} , har κ vändtangentsplaner, polarplanerna, respektive C_{n+1} , för kurvans spetsar såsom poler.*

27. Om från en godtycklig punkt man bildar perspektivet på ett plan af en kurva i rymden, så äro perspektiv-kurvans ordning och klass = ordningen och klassen, respektive, för den första kurvan; den nya kurvans spetsar äro perspektiven af den första kurvans spetsar och dess inflexionstangenter äro planets skärningslinier med de osculerande planer till den första kurvan, som går genom centrum för perspektivet¹⁾. — I enlighet härmed är perspektivet af kuspidakurvan för sista polaren till K , respektive C_{n+1} , en plan kurva, som är af ordningen $3\mu(n-2) + 3\nu + \kappa$, af klassen $2\mu(n-1) + \nu$, och som har $\mu \cdot n$ inflexionstangenter. Genom Plückers formler följer härafter antalet af dess spetsar att vara $4\mu(n-3) + 6\nu + 3\kappa$; d. ä. enligt föregående:

Kuspidakurvan på sista polaren för K , respektive C_{n+1} , har $4\mu(n-3) + 6\nu + 3\kappa$ spetsar.

¹⁾ SALMON-FIEDLER: Anal. Geom. des Raumes Theil II. Leipzig 1865. s. 81.

Anm. Detta tal utmärker ock antalet ytor af n :te ordningen i ett system, hvilka med K hafva en beröring af tredje ordningen.

28. Utmärker man med b ordningen för sista polarens dubbelkurva, med c ordningen för dess kuspidualkurva, med β antalet af den förra kurvans och med γ antalet af den sednare kurvans spetsar, med m ordningen för sista polaren sjelf samt slutligen med τ antalet af dess trefaldiga punkter: så erhållas af SALMONS ¹⁾ formler:

$$b(m-2) = \mu n(m-4) + 3\beta + 2\gamma + 3\tau,$$

$$c(m-2) = 2\mu n + \beta + 4\gamma,$$

värdena för β och τ . — Dessa tal angifva: β , antalet ytor af n :te ordningen i ett gifvet system, som med K i en punkt hafva en beröring af första och i en andra punkt en beröring af andra ordningen; τ , antalet af de ytor i systemet, som i tre skilda punkter tangera K .

29. Af den här utvecklade betydelsen hos punkterna på sista polaren, på dess dubbel- och kuspidualkurva, följer genast, huru man, genom två gifna kurvors sista polarer, kan härleda antalet af de ytor i ett geometriskt nät, som beröra två gifna kurvor samtidigt, antalet af de ytor i ett system, som med den ena kurvan hafva en beröring af första och med den andra en beröring af andra ordningen, samt vidare antalet af de ytor i ett system, som med den ena kurvan hafva en enkel och med den andra kurvan en dubbel kontakt.

§. III. Om ytor i ett lineärt system, skärande en gifven kurva vinkelrät.

30. Orten för de punkter, hvilkas polarplaner i afseende på två gifna ytor C_m , $C_{m'}$, af m :te och m' :te ordningen respektive, stå vinkelräta mot hvarandra, är en yta af ordningen $m + m' - 2$, som går genom de gifna ytornas dubbel- och kuspidualkurvor, när sådana finnas, och som tangerar längs kurvorna af det sista slaget de gifna ytorna.

Detta bevisas på följande sätt: Om L är en rät linie som i δ punkter träffar ytans C_m dubbel- och kuspidualkurvor samt vidare tangerar C_m i z punkter på den sednare kurvan, så blir enveloppen af polarplanerna för punkterna på L respektive C_m (eller sista polaren för L resp. C_m) en developpabel yta af klassen $m - 4 - \delta - 2z$. — Enveloppen af polarplanerna, respektive $C_{m'}$, för punkterna på samma linie, när δ' , z' hafva samma betydelse för $C_{m'}$ som δ , z hafva för C_m , är en developpabel yta af klassen $m' - 4 - \delta' - 2z'$.

¹⁾ SALMON-FIEDLER: Anal. Geom. s. 508.

En arbiträr punkt a på L bestämmer ett polarplan respektive C_m och dermed $m' - 1 - \delta' - 2x'$ tangentplaner till den sistnämnda enveloppen, parallela med en perpendikel mot det första polarplanet och derföre vinkelräta mot detta sjelf. Deras poler ligga på L och vi kalla dem b , så att en punkt a bestämmer $m' - 1 - \delta' - 2x'$ punkter b . — Af samma grunder skall en punkt b bestämma $m - 1 - \delta - 2x$ punkter a . Häraf följer att på L finnas $m + m' - 2 - \delta - \delta' - 2(x + x')$ punkter, utom liniens skärningspunkter med ytornas dubbel- och kuspidualkurvor, hvilka punkter äro lägen för sammanfallande motsvarande a och b samt sålunda skärningspunkter med den ifrågavarande orten. — Sålunda är denna ort en yta af ordningen $m + m' - 2$, som går genom de gifna ytornas dubbelkurvor och tangerar dem i deras kuspidualkurvor. H. S. B.

Häraf sluta vi vidare:

Det finnes i allmänhet $mm'(m + m' - 2) - m(2\delta' + 3x') - m'(2\delta + 3x)$ punkter, i hvilka två gifna ytor $C_m, C_{m'}$ skära hvarandra vinkelrät, när nemligen $\delta, x; \delta', x'$ utmärka ordningstalen för dessa ytors dubbel- och kuspidualkurvor.

31. Två ytor, af hvilka den första är ort för polerna till de mot hvarandra vinkelräta polarplanerna i afseende på C_m och C_n , den andra är ort för polerna till de vinkelräta polarplanerna i afseende på $C_{m'}$ och C_n , skära hvarandra i orten för de punkter, hvilkas polarplaner respektive $C_m, C_{m'}$ gå genom en perpendikel mot samma punkts polarplan respektive C_n . Denna ort är då, under antagande att C_n saknar dubbel- och kuspidualkurvor, en kurva af ordningen $(m + n - 2)(m' + n - 2)$.

32. Orterna för polerna till de vinkelräta polarplanerna, respektive C_{m_i} och de särskilda $C_n, C'_n, \dots$ i en knippa ytor af n :te ordningen, bilda sjelfva en knippa ytor af ordningen $m + n - 2$. Detta är tydligt deraf att genom en arbiträr punkt p i rymden endast en dylik yta går; den yta nemligen, hvars motsvarande yta i knippan (C_n, C'_n) har ett polarplan för p parallelt med en perpendikel mot samma punkts polarplan respektive C_m och sålunda vinkelrät mot detta sednare.

Samma slag af ytor, i afseende på föregående knippa och en yta $C_{m'}$, bilda äfvenledes en knippa. Skärningskurvan mellan de, samma yta i knippan (C_n, C'_n) motsvarande, ytorna i dessa två nya knippor genererar en yta af ordningen $m + m' + 2n - 4$:

Orten för en punkt, hvars polarplaner i afseende på $C_m, C_{m'}$ skära hvarandra i en linie vinkelrät mot punktens polarplan, respektive någon yta i en gifven knippa (C_n, C'_n) , är en yta af ordningen $m + m' + 2n - 4$.

33. Genom att betrakta ytan, som genereras af skärningskurvan mellan motsvarande ytor i knippan (C_n, C'_n) och orterna för polerna till de mot hvarandra vinkelräta polarplanerna, resp. C_m och de serskilda ytorna i knippan, finner man:

Orten för en punkt, genom hvilken en yta i knippan (C_n, C'_n) går med ett tangentplan i denna punkt vinkelrät mot densamma punktens polarplan respektive C_m , är en yta af ordningen $m + 2n - 2$, som innehåller den gifna knippans basiskurva, som går genom dubbelkurvan på ytan C_m och som tangerar denna yta i dess kuspidakurva.

Koroll. En kägla af m :te ordningen och n :te klassen har $m + n$ normalplaner, gående genom en gifven rät linie genom kägslans spets.

34. När kurvan (C_n, C'_n) intager de möjliga lägena på ytan C_n af en basiskurva till en knippa i nätet (C_n, C'_n, C''_n) , finner man om de serskilda i förra artikeln nämnda ytor, som motsvara C_m och dessa serskilda knippor, att desamma bilda en knippa. En arbiträr punkt p bestämmer nemligen en enda yta C'_n i nätet, som går genom p med ett tangentplan i denna punkt vinkelrät mot polarplanet för p respektive C_m : och (C_n, C'_n) är då den enda knippa i nätet, hvars basiskurva ligger på C_n och respektive hvilken en yta af det ifrågavarande slaget går genom p . — Emedan två, samma knippa (C_n, C'_n) i nätet samt C_m och $C_{m'}$ motsvarande, ytor af detta slag skära hvarandra, utom i kurvan (C_n, C'_n) , i en kurva, som är ort för en punkt, genom hvilken en yta i knippan går med sitt tangentplan derstädes vinkelrät mot skärningslinien mellan samma punkts polarplaner respektive $C_m, C_{m'}$; samt skärningskurvan genererar en yta, bestående till en del af C_n och sålunda till en andra del af en yta af ordningen $m + m' + 3n - 4$: så följer:

Orten för en punkt, genom hvilken en yta i ett gifvet nät (C_n, C'_n, C''_n) går med ett tangentplan derstädes vinkelrät mot skärningslinien mellan punktens polarplaner i afseende på C_m och $C_{m'}$, är en yta af ordningen $m + m' + 3n - 4$. Denna yta beteckna vi i det följande med M : den går tydligen genom beröringspunkterna mellan C_m och $C_{m'}$, d. v. s. genom kurvans $(C_m, C_{m'})$ dubbelpunkter och genom dess spetsar, i hvilka den tangerar kurvan.

De öfriga skärningspunkterna mellan M och $(C_m, C_{m'})$ bestämma ytor i nätet, som skära kurvan vinkelrät:

I ett geometriskt nät ytor af n :te ordningen finnas i allmänhet $m(m' + m' + 3n - 4) - 2\delta - 3z$ ytor skärande vinkelrät två ytors skärningskurva, hvilka ytor äro af m :te och m' :te ordningen respektive och som i δ punkter hafva en enkel, i z punkter en stationär beröring med hvarandra.

Om $(C_m C_{m'})$ består af flera kurvor, af hvilka den ena är en kurva K af ordningen μ och klassen ν samt besitter δ dubbelpunkter och α spetsar; så finner man, under iakttagande af värdet för ν (24), att i ett geometriskt nät ytor af n :te ordningen finnas i allmänhet $\mu(3n - 2) + \nu$ ytor, som skära K vinkelrät.

35. Då de serskilda ytorna af n :te ordningen i ett system kunna antagas motsvara punkterna i rymden på samma sätt som första polarer, i afseende på en yta C_{n+1} af $n + 1$:sta ordningen, motsvara sina poler; kan den sist gifna satsen äfven uttryckas på följande sätt:

Orten för de punkter, hvilkas motsvarande ytor af n :te ordningen i ett system skära en gifven kurva K af μ :te ordningen och ν :te klassen vinkelrät, är en geometrisk kurva af ordningen $\nu + \mu(3n - 2)$.

Denna kurva betecknas i det följande med J .

36. Kurvans klass bestämmes af antalet tangentplaner, som genom en arbiträr rät linie L kunna dragas till kurvan. — Hvarje tangentplan genom L motsvarar ett nät ytor i systemet, hvilkas basispunkter ligga på basiskurvan (L) till en viss knippa ytor i systemet, och af hvars ytor tvenne skära K i två successiva punkter vinkelrät; — nät som sålunda äro af den beskaffenheten att deras basispunkter ligga på (L) och att deras motsvarande M (34) tangera K .

Nu bilda ytorna M , som motsvara nät i systemet med basispunkterna på (L) , en knippa ytor, samtliga gående genom kurvans K δ dubbelpunkter och genom de t punkter, i hvilka densamma kurvan träffar de öfriga beståndsdelarne till $(C_m C_{m'})$, samt tangerande K i dess spetsar (34); så att (22) derföre $\nu + 2\mu(m + m' + 3n - 5) - 2t - 4\delta - 5\alpha = 3\nu + 6\mu(n - 1) + \alpha$ ytor i denna knippa finnas, hvilka tangera K ; d. v. s.:

Klassen för kurvan J är $3\nu + 6\mu(n - 1) + \alpha$.

37. Ytorna M , som motsvara de serskilda näten i systemet med basispunkterna på en viss yta O , bilda ett geometriskt nät, ty genom två arbiträra punkter kan endast en dylik yta läggas. Enligt (22) finnas $3\nu + 3\mu(m + m' + 3n - 6) - 3t - 6\delta - 6\alpha = 6\nu + 3\mu(3n - 4) + 3\alpha$ ytor i detta nät, oskulerande K . De nät i systemet, som motsvara dessa ytor, hafva sina basispunkter liggande på O , och i hvart och ett af dem finnas tre ytor, som i tre successiva punkter äro vinkelräta mot K . Dessa nät motsvara då planer gående genom en viss punkt o och, hvardera, träffande J i tre konsekutiva punkter, d. ä. oskulerande J . — Häraf följer:

Den af de oskulerande planerna till J envelopperade developpabla ytan är af klassen $6\nu + 3\mu(3n - 4) + 3\alpha$.

38. Denna sistnämnda ytas plana skärningskurva är af ordningen $3\nu + 6\mu (n - 1) + z$, af klassen $6\nu + 3\mu (3n - 4) + 3z$ och har spetsar till ett antal $\nu + \mu (3n - 2)$. (Man jfr 24). Enligt Plückers formler har då densamma $10\nu + 4\mu (3n - 5) + 6z$ inflexionstangenter; och deraf följer:

Kurvan J har $10\nu + 4\mu (3n - 5) + 6z$ osculerande vändtangenterplaner.

39. Kägla, omskrifven kurvan J, är (27) af en ordning och klass lika med ordningen och klassen för J, har de osculerande planerna till J, som gå genom kägla's spets, till inflexionstangentplaner och slutligen sammanbindningslinierna af samma spets med de möjliga återvändspunkterna på J såsom kuspidualkanter. Genom Plückers formler, tillämpade på ett plans skärningskurva med kägla, finner man att kuspidualkanter saknas; sålunda att *kurvan J saknar spetsar*.

Detta är dessutom tydligt deraf, att en spets på J skulle motsvara en yta i systemet, hvilken i två oändligt nära belägna punkter vore vinkelrät mot J; — en dylik yta är åter en orimlighet. — För öfrigt, då en yta i systemet ej kan uppfylla flera än tre af hvarandra oberoende villkor och fordran att en yta skall stå vinkelrät mot en gifven kurva är equivalent med två villkor — bestämmande ett inskränkt antal ytor i ett nät (34), — samt sålunda fordran att en yta skall i två punkter träffa en gifven kurva vinkelrät är likagällande med fyra villkor: så kan i allmänhet ej i ett system ytor någon yta finnas, som i två punkter träffar en kurva vinkelrät.

Detta bevisar vidare, att *kurvan J måste sakna dubbelpunkter*, ty dessa skulle, om de funnos, motsvara just ytor i systemet, som i två skilda punkter träffade K vinkelrät.

40. Men i systemet kunna vissa ytor finnas, som i en punkt tangera K och i en annan punkt träffa densamma vinkelrät. Deras motsvarande punkter äro skärningspunkterna emellan J och den developpabla ytan, hvars punkters motsvarande ytor tangera K, — sista polaren för K respektive den i (35) anmärkta ytan af $n + 1$:sta ordningen, ytan C_{n+1} .

Vi skola här visa att alltid ett bestämdt antal af dessa skärningspunkter äro imaginära och motsvara (imaginära) ytor i systemet, hvilka hvardera i en punkt på samma gång tangera och skära K vinkelrät.

För detta ändamål förutskicka vi följande sats: "Det finnes i allmänhet νp tangenter till kurvan K, hvilka träffa en annan gifven kurva af p :te ordningen." — Denna sednare kurvas skärningspunkter med tangenterna, äro dess skärningspunkter med den af de osculerande planerna till K envelopperade ytan.

I enlighet härmed finnas då 2ν (imaginära) tangenter till K, hvilka träffa den imaginära cirkeln oändligt långt borta, hvilken är kulornas gemensamma asymptotkurva. Hvar och en af dessa tangenter, såsom varande asymptot för en kula, är

då vinkelrät mot ett visst imaginärt plan genom linien, en kulas asymptotplan genom linien.

Förstår man med ι en af de nämnda tangenternas beröringspunkter med K , så följer om den yta i systemet, hvilken är bestämd att gå genom ι och derstädes hafva såsom tangentplan asymptotplanet, genom kurvans tangent i ι , för en kula, — att densamma ytan äfven är vinkelrät mot kurvan K i punkten ι . — De punkter, hvilka (såsom poler respektive C_{n+1}) motsvara dylika ytor, kalla vi e ; de ligga nu på J såväl som på sista polaren, respektive C_{n+1} , för kurvan K .

Polarplanet, respektive C_{n+1} , för ι är tangentplan i e till kurvans K sista polaryta. Tangenten till J i samma punkt e bestämmes af två ytor i systemet, den första, C_n , träffande K vinkelrät i ι , den andra, C'_n , träffande K vinkelrät i nästgränsande punkt; då nemligen dervid två arbiträra punkter på kurvan ($C_n C'_n$) hafva polarplaner, respektive C_{n+1} , skärande hvarandra i den ifrågavarande tangenten. Nu tangerar C_n — enligt hvad förut är nämnt — kurvan K i punkten ι , och den ι nästgränsande punkten på K , eller ι sjelf, är sålunda en punkt på ($C_n C'_n$). Tangenten till J i punkten e ligger sålunda i polarplanet för ι respektive C_{n+1} ; d. v. s.:

Kurvan J tangerar kurvans K sista polaryta, resp. C_{n+1} , i de 2ν punkterna e .

Vi se på samma sätt, att polerna till de ytor i systemet, hvilka hafva en dubbelpunkt liggande på K , äro tangeringspunkter emellan kurvan J och kurvans K sista polaryta i afseende på C_{n+1} .

De öfriga skärningspunkterna mellan kurvans K sista polaryta och kurvan J äro sålunda af antalet $[\nu + \mu (3n - 2)] [\nu + 2\mu (n - 1)] - 4\nu - 8\mu (n - 1)$; och deraf följer:

I ett system ytor af n :te ordningen finnas i allmänhet $[\nu + \mu (3n - 2)] [\nu + 2\mu (n - 1)] - 4\nu - 8\mu (n - 1)$ ytor, som i en punkt tangera och i en annan skära vinkelrät en gifven kurva af μ :te ordningen och ν :te klassen.

41. Skärningspunkterna mellan J och första polarytan, respektive C_{n+1} , för en andra kurva K' bestämma de ytor i systemet, hvilka på samma gång tangera K' och äro vinkelräta mot K .

§. IV. Om geometriska kurvors Normaler och Normalplaner.

42. Låta vi det i föregående § afhandlade systemet ytor vara ett system planer, d. ä. n vara 1, så finna vi ytan C_{n+1} (35) vara en arbiträr (icke-develop-

pabel) yta af andra ordningen. Kurvan J blir i detta fall polaren, respektive C_2 , för den developpabla yta, som envelopperas af principal-normalplanerna till K . Dess singulariteter, af hvilka de hufvudsakligaste framgå af de förra artiklarne för $n = 1$, härledas enklast genom att för C_2 välja en kula; denna kulas centrum beteckna vi i det följande med O . — Ur singulariteterna för J följa sedan omedelbart singulariteterna för den af principal-normalplanerna genererade ytan, kurvans K *normalyta*.

Polarytan, respektive C_2 , för kurvan K är en developpabel yta af ordningen ν och klassen μ ; vi kalla densamma för K' . En punkt på K motsvarar ett tangentplan till K' , en tangent till K en generatrice till K' . Emedan vidare ett plan och dess pol, i afseende på kulan C_2 , stå till hvarandra i en sådan relation att polens sammanbindningslinie med O är vinkelrät mot planet, så måste ett principal-normalplan till K , d. ä. ett plan genom en punkt på K , vinkelrät mot kurvans tangent i punkten, hafva till pol, respektive C_2 , en punkt e i ett tangentplan till K' så beskaffad att linien Oe är vinkelrät mot planet genom O och det nämnda tangentplanets beröringsgeneratrice med K' . I det följande utmärka vi kortligen med uttrycket " e och motsvarande tangentplan till K' " den punkt e i ett tangentplan till K' , som från O ses under rät vinkel med det sednare planets beröringsgeneratrice; i enlighet härmed skall med uttrycket " e och motsvarande generatrice för K' " förstås en punkt e och det motsvarande tangentplanets beröringsgeneratrice med K' . — Kurvan J är nu orten för punkterna e .

43. I ett arbiträrt plan E genom punkten O finnas ν räta linier Oe , nemligen perpendiklarne från O mot de planer som gå genom O och hvardera af de ν generatricer till K' , som träffa perpendikeln från O mot E . Tangentplanerna längs dessa generatricer skära de nämnda linierna Oe i de enda punkter e , hvilka ligga i planet E och ej sammanfalla med O . Men denna sednare punkt är sjelf ort för μ punkter e , de punkter nemligen, som motsvara tangentplanerna till K' genom O . — Härmed är sålunda bevisadt, att *kurvan J är af ordningen $\mu + \nu$ (33) och har μ grenar genom O .*

44. Vi låta E vara ett plan vinkelrät mot ett tangentplan till K' från O . I detsamma planet finnas då endast $\nu - 2$ punkter e differenta från O , hvilket bevisar att hvarje dylikt läge för E skär J i $\mu + 2$ med O sammanfallande punkter. — Sålunda:

Perpendiklarne från O mot de μ tangentplanerna till K' , som gå genom denna punkt, äro tangenter och just stationära tangenter i O till kurvans J grenar genom punkten.

45. Skall planet E i någon punkt e , different från O , tangera J , så måste perpendikeln i O mot E gå genom en skärningspunkt emellan två successiva generatricer till K' , d. ä. träffa denna ytas kuspidualkurva.

Härefter bestämmas, utom O befintliga, beröringspunkter emellan J och denna kurvas tangentplaner genom en arbiträr rät linie L , gående genom O , såsom de punkter e , hvilkas motsvarande generatricer till K' beröra kuspidualkurvan i dess skärningspunkter med planet vinkelrät mot L . Dessa punkter äro (23) till antalet $3(\nu - \mu) + \kappa$, och kurvan J har då lika många tangentplaner gående genom L och tangerande densamma i punkter differenta från O . — Enligt hvad i förra artikeln är nämdt, äro planerna genom L och kurvans J tangenter i O , att räkna såsom 3μ tangentplaner genom L , hafvande sina beröringspunkter i O och nästgränsande punkter. Derfor: *klassen för J är $3\nu + \kappa$* (36).

46. Skall E osculera J i någon punkt e different från O , så måste perpendikeln i O mot E gå genom en skärningspunkt emellan tre på hvarandra följande generatricer till K' , d. ä. gå genom en spets på denna ytas kuspidualkurva. Dess spetsar äro till antalet $6\nu - 8\mu + 3\kappa$ (27), och lika många punkter finnas sålunda på J differenta från O , hvilkas osculerande planer gå genom O . Denna sednare punkt är, på hvarje af kurvans grenar genom densamma, en skärningspunkt mellan ett plan med trepunktig och två planer med fyrapunktiga beröringar, dessa sednare gående genom en stationär tangent (44) i O till J . Emedan hvardera af dessa sednare planer är ort för två planer med trepunktig beröring, måste O , betraktad tillhörande en enda af kurvans J grenar, vara skärningspunkt emellan fem enkelt osculerande planer till J ; d. v. s. genom O gå 3μ osculerande planer till J med O och nästgränsande punkter till O såsom osculationspunkter. — Vi hafva härmed funnit att *genom hvarje punkt i rymden gå $6\nu - 3\mu + 3\kappa$ planer som osculera J* (37).

Bortseende från de planer, som kunna läggas genom hvardera af de stationära tangenterna och en arbiträr punkt i rymden, hvilka samtliga planer hafva en trepunktig beröring med J , finna vi endast $6\nu - 4\mu + 3\kappa$ andra osculerande planer gående genom en gifven punkt; och sålunda:

Klassen för den af tangenterna till J genererade ytan är $6\nu - 4\mu + 3\kappa$.

47. Den af tangenterna till J genererade ytan har kurvan J sjelf såsom kuspidualkurva samt dess μ stationära tangenter i O såsom stationära generatricer. Ett godtyckligt plan skär densamma i en kurva, hafvande planets skärningspunkter med J och med de μ stationära generatricerna såsom spetsar, samt varande af ordningen $3\nu + \kappa$ och af klassen $6\nu - 4\mu + 3\kappa$. Dess inflexionstangenter äro planets skärningslinier med kurvans J osculerande vändtangenter, och deras antal är, efter

Plückers formler, $3(3\nu - 4\mu + 2\kappa) + 2\mu + \nu = 10\nu - 10\mu + 6\kappa$: *kurvan J har* $10(\nu - \mu) + 6\kappa$ *oskulerande vändtangenterplaner.*

Hvarje af de μ stationära tangenterna till J är en skärningslinje emellan två närbelägna planer med fyrpunktig beröring till J. Räkade till de förut nämnda planerna gifva de antalet tangentplaner med fyrpunktig beröring till J att vara $10\nu - 8\mu + 6\kappa$ (38).

48. Ytans K' oskulerande vändtangenterplaner äro tangentplaner längs två konsekutiva generatricer, så att derföre (42) två successiva punkter på J ligga i hvardera planet: *kurvan J tangeras af de oskulerande vändtangenterplanerna till K' .*

49. De tangenter till K, hvilka, hvardera, äro asymptoter för en kula, motsvara de generatricer till K' , hvilka ligga i asymptotplaner för kulan C_2 . Deras oändligt långt bort belägna beröringspunkter med C_2 kalla vi α ; räta linierna $O\alpha$ blifva dermed vinkelräta mot planerna genom O och de ifrågavarande generatricerna till K' . Här af följer att skärningspunkten α' emellan hvarje par, i samma asymptotplan till C_2 liggande $O\alpha$ och generatrice för K' är en punkt på J. En närbelägen punkt på J ligger (42) i tangentplanet för K' längs den generatrice hvars närbelägna går genom α' , och då nu vidare detta tangentplan äfven innehåller den sistnämnda generatricen (ty hvarje tangentplan innehåller två konsekutiva generatricer för den utvecklade ytan); så är klart att *kurvan J måste tangera ytan K' i hvarje punkt α'* ; dessa punkters antal är 2ν . — Denna egenskap hos J är på annat sätt förut (40) bevisad.

50. De föregående artiklarne lemna satser om kurvans J polar respektive C_2 , det är om kurvans K normalyta (42):

En kurva K af μ :te ordningen, ν :te klassen samt besittande κ spetsar har en normalyta af ordningen $3\nu + \kappa$ och af klassen $\mu + \nu$;

densamma ytan har planet oändligt långt borta såsom μ :faldigt tangentplan, och dess beröringsgeneratricer äro stationära generatricer till ytan;

densamma har en kuspidualkurva af ordningen $6\nu - 4\mu + 3\kappa$, besittande $10(\nu - \mu) + 6\kappa$ spetsar.

Emedan normalytan är orten för skärningslinjen mellan två konsekutiva principal-normalplaner för K, — en linje som för namn af krökningsaxel, — blir denna yta äfven ort för centra till de kulor som oskulera K; normalytans kuspidualkurva, såsom varande ort för skärningspunkten emellan tre konsekutiva principal-normalplaner för K, är ort för centra till de kulor, som hafva en beröring af tredje ordningen med K: spetsarne på kuspidualkurvan slutligen, hvardera varande en skär-

ningspunkt emellan fyra konsekutiva principal-normalplaner, äro centra till kulor hafvande en beröring af fjärde ordningen med K .

31. Af (48) följer att *kurvans* K *normalyta* går genom spetsarne på K ; af (49) att *densamma ytan tangerar* K i dess *imaginära beröringspunkter* med *kulornas asymptoter*. — Det finnes $\mu(3\nu + \kappa) - 2\kappa - 4\nu$ andra skärningspunkter emellan K och normalytan, hvilket bevisar att:

På en geometrisk kurva af μ :te ordningen och ν :te klassen, med κ spetsar, finnas högst $\nu(3\mu - 4) + \kappa(\mu - 2)$ punkter, hvilka äro centra för kulor som oskulera K .

32. De reela, för K och dess normalyta gemensamma tangentplanerna äro till antalet högst $\nu(\mu + \nu) - 4\nu$; hvaraf:

Det finnes i allmänhet $\nu(\mu + \nu - 4)$ planer, hvilka i en punkt äro principal-normalplaner och i en annan punkt tangentplaner till kurvan K .

33. Deremot: *Det finnes i allmänhet $\nu'(\mu + \nu)$ planer, hvilka äro vinkelräta mot K och tangera en annan kurva af klassen ν' .*

34. Räta linien i ett oskulerande plan till K , vinkelrät mot kurvan i dess oskulationspunkt med planet, utmärkes såsom *kurvans principal-normal* i denna punkt. — Dess reciproka polar, i afseende på kulan C_2 , är sammanbindningslinien emellan en punkt ε på kuspidualkurvan för K' och den punkt e på J , hvars motsvarande generatrice för K' (42) går genom ε . Den af linien $e\varepsilon$ genererade ytan utgör härmed polar, respektive C_2 , för den af principal-normalerna till K genererade ytan. Den förra ytan kalla vi M och dess ordning bestämmes genom det antal generatricer för densamma, som träffa en arbiträr linie L .

Hvarje plan A genom L skär kuspidualkurvan för K' i $3(\nu - \mu) + \kappa$ punkter ε , motsvarande lika många punkter e på J och dermed lika många planer B , gående genom L och e . Omvänt måste ett plan B bestämma $\mu + \nu$ planer A ; så att genom L kunna dragas $4\nu - 2\mu + \kappa$ planer, hvardera varande ort för ett motsvarande par A, B och sålunda hvardera träffande J och kuspidualkurvan för K' i två motsvarande punkter e, ε . Härmed är antalet linier $e\varepsilon$, som träffa L , bestämdt: ytan M är af ordningen $4\nu - 2\mu + \kappa$.

Punkten O är μ :faldig på J och motsvarar μ differenta punkter ε på kuspidualkurvan för K' ; sålunda:

Punkten O är en μ :multipelpunkt på ytan M .

Kurvan J ligger i hela sin utsträckning på ytan M ; de μ stationära tangenterna (44) på J blifva derföre inflexionstangenter till M i punkten O :

Ytan M har μ serskilda tangentplaner i O , hvardera innehållande en stationär tangent i O till J och en rät sammanbindningslinje emellan O och en oskulationspunkt för kuspidualkurvan på K' med ett denna ytas tangentplan genom O .

Tangentplanet till M i en punkt på kuspidualkurvan för K' är ett plan genom εe och kurvans tangent i ε , d. ä. ett tangentplan till K' :

Ytan M är omskrifven ytan K' längs den sednare ytans kuspidualkurva.

55. Af dessa satser härleder man om den af principal-normalerna till K genererade ytan:

Om K är en kurva af μ :te ordningen, ν :te klassen och besitter x spetsar, så generera dess principal-normaler en yta af ordningen och klassen $4\nu - 2\mu + x$, hvilken har planet oändligt långt borta såsom tangentplan i μ punkter; densamma ytan oskulerar i dessa punkter normalytan.

Den af tangenterna till K genererade ytan är, längs kurvan K sjelf, omskrifven den af dess principal-normaler genererade ytan.

56. Efter hvad förut är nämdt om de tangenter till K , som äro kulors asymptoter, följer att dessa tangenter äro på samma gång kurvans principal-normaler i beröringspunkterna: *Den af principal-normalerna till K genererade ytan innehåller de tangenter till K , hvilka äro kulors asymptoter.*

57. *Krökningskurvan för K är orten för centra till de cirklar, hvilka ligga i oskulerande planerna för K och oskulera denna kurva i dess beröringspunkter med planerna. Dess polar, respektive C_2 , är en developpabel yta, envelopperad af ett plan, som går genom en generatrice εe till M (54) och genom tangenten i e till J . Vi se genast om denna yta, att den har μ tangentplaner, hvilkas beröringsgeneratricer gå genom O och just äro de stationära tangenterna i O till J (44). — Dess klass bestämmes på följande sätt:*

Från en arbiträr punkt ι såsom spets kan en kägla af ordningen $\mu + \nu$ och af klassen $3\nu + x$ omskrifvas J . Skärningspunkterna af en arbiträr linie L med käglaens tangentplaner beteckna vi med a , dess skärningspunkter med tangentplanerna till M genom ι med b . Hvarje punkt a bestämmer en linie ιa , genom hvilken $3\nu + x$ tangentplaner kunna dragas till kägla, och hvilkas beröringspunkter e med J bestämma lika många generatricer εe , samt dermed lika många tangentplaner till M gående genom dem och genom ι . Deras skärningspunkter med L äro de, den första punkten a motsvarande punkterna b ; så att en punkt a motsvarar $3\nu + x$ punkter b . — Omvänt bestämmer en punkt b en rät linie ιb , träffande $4\nu - 2\mu + x$ generatricer εe , samt dermed lika många tangentplaner till den första kägla längs linierna ιe . Dessa sednare planers skärningspunkter med L äro de motsvarande

punkterna a , så att nu en punkt b bestämmer $4\nu - 2\mu + \kappa$ punkter a . — Af det här nämnda följer att på L finnas $7\nu - 2\mu + 2\kappa$ punkter, hvardera varande ort för två sammanfallande motsvarande a, b . En dylik punkt är åter antingen en skärningspunkt emellan L och käglan genom ι , eller ock en skärningspunkt emellan L och ett plan, som, gående genom ι , tangerar J i en punkt e och på samma gång innehåller den motsvarande linien ϵe , d. ä. en skärningspunkt emellan L och ett tangentplan genom ι till den ifrågavarande developpabla ytan.

På detta sätt har framgått att polaren, respektive C_2 , för kurvans K krökningskurva är af klassen $7\nu - 2\mu + 2\kappa - (\mu + \nu) = 6\nu - 3\mu + 2\kappa$.

58. Välja vi punkten ι i förra artikeln att sammanfalla med O , blir den J omskrifna käglan af ordningen ν och klassen $3(\nu - \mu) + \kappa$. En arbiträr linie ιb träffas, utom i punkten O , af endast $4\nu - 3\mu + \kappa$ generatricer ϵe . Här af följer att genom O kunna till den developpabla ytan endast $6\nu - 6\mu + 2\kappa$ tangentplaner dragas, hvilka planers beröringsgeneratricer med ytan ej gå genom O . Hvardera af de i början af förra artikeln nämnda tangentplanerna i punkten O är sålunda en ort för tre tangentplaner genom O till den developpabla ytan, hvilka planer hafva sina beröringsgeneratricer gående genom O eller närbelägna punkter på J . Detta beror derpå att den ifrågavarande ytans kuspidualkurva går μ gånger genom O , derstädes tangerande de stationära tangenterna till J .

59. Emedan J ligger på den ifrågavarande developpabla ytan och tangerar vändtangentplanerna till K' i dess motsvarande punkter e (48), så blifva dessa samma planer äfven tangentplaner till den första developpabla ytan.

Densamma ytan är tydligen omskrifven ytan M (54) längs kurvan J .

Af (49) följer att tangentplanet till K' i en af de derstädes utmärkta punkterna α' äfven är tangentplan i samma punkt till den i (57) definierade developpabla ytan; d. v. s.: polaren, resp. C_2 , för kurvans K krökningskurva tangerar ytan K' i de 2ν punkterna α' .

60. Den imaginära cirkeln oändligt långt borta har $6(\nu - \mu) + 2\kappa$ tangentplaner gemensamma med den af tangenterna till K genererade ytan. De äro de osculerande planer till K , hvilka på samma gång äro asymptotplaner för kulor. Principal-normalplanerna i de två närbelägna punkter på K , hvilka tillsammans utgöra en oskulationspunkt för ett dylikt plan, skära hvarandra i en rät linie vinkelrät mot planet och som derföre är parallel med den i detsamma planet liggande asymptoten för en kula. Denna perpendikels skärningspunkt med det motsvarande osculerande planet är då en punkt på den imaginära cirkeln oändligt långt borta,

på samma gång som den är (57) en punkt på kurvans K krökningskurva. Den samma perpendikeln är en generatrice till kurvans K normalyta (50) och emedan denna ytas asymptotkurva består, utom af de μ stationära generatricerna oändligt långt borta, af en kurva af ordningen $3(\nu - \mu) + \kappa$, samt denna sednares $6(\nu - \mu) + 2\kappa$ skärningspunkter med den imaginära cirkeln just bestämma de generatricer till normalytan, hvilka äro kulors asymptoter; så följer:

Krökningskurvan för en geometrisk kurva K af μ :te ordningen, ν :te klassen samt besittande κ spetsar, träffar planet oändligt långt borta i de $6(\nu - \mu) + 2\kappa$ imaginära punkter, genom hvilka generatricer till normalytan gå, på samma gång varande kulors asymptoter.

Af (58) framgår att krökningskurvan har ytterligare μ punkter oändligt långt borta, hvilkas tangenter äro normalytans stationära generatricer (50) och hvilkas oskulerande planer falla oändligt långt borta. — Dessa punkter äro kurvans enda reela asymptotpunkter.

61. Af (57) följer att ordningen för kurvans K krökningskurva är $6\nu - 3\mu + 2\kappa$; och af (59) att: densamma kurvan går genom spetsarne på K , samt tangenter K i de punkter, hvilkas tangenter äro kulors asymptoter. — Kurvans K normalyta är längs krökningskurvan omskrifven den af principal-normalerna för K genererade ytan.

62. Ett tangentplan till K , vinkelrät mot dess i tangeringspunkten oskulerande plan, är kurvans *binormalplan* eller *rektificerande plan i punkten*. Den af de rektificerande planerna envelopperade ytan är kurvans *rektificerande yta*, och denna ytas polar, i afseende på C_2 , är en kurva på följande sätt bestämd.

Hvarje rektificerande plan har till pol, i afseende på C_2 , en punkt på en generatrice till K' , som från O ses under rät vinkel med generatricens beröringspunkt till ytans K' kuspidualkurva.

Vi låta E vara ett plan genom O och (L, L') vara en linieknippa genom O ; hvarje rät linie L är vinkelrät mot sammanbindningslinierna mellan O och $3(\nu - \mu) + \kappa$ punkter på kuspidualkurvan för K' ; denna kurvas tangenter i de sista punkterna, generatricer för K' , skära E i punkter, hvilkas sammanbindningslinier med O vi kalla L' . En rät linie L bestämmer sålunda $3(\nu - \mu) + \kappa$ linier L' . — En rät linie L' träffas af ν generatricer till K' , hvilkas beröringspunkter med kuspidualkurvan hafva sammanbindningslinier med O , bestämmande lika många perpendiklar L i planet E . — Häraf följer att det finnes $4\nu - 3\mu + \kappa$ lägen för sammanfallande L, L' , hvardera läget innehållande en punkt på den sökta kurvan. Alltså har kurvan detta tal såsom ordningstal; d. v. s.:

En geometrisk kurva af μ :te ordningen och ν :te klassen samt besittande κ spetsar har en rektificerande yta af klassen $4\nu - 3\mu + \kappa$.

Dess generatricer, skärningslinier emellan två närbelägna rektificerande planer, kallas kurvans K rektificerande rätta linier.

63. Normalen i en punkt på K , vinkelrät mot kurvans osculerande plan i punkten, är kurvans *binormal* i samma punkt; dess reciproka polar, respektive C_2 , är skärningslinien emellan ett tangentplan till K' och ett plan genom O vinkelrät mot denna sednare punkts sammanbindningslinje med det nämnda tangentplanets osculationspunkt till ytans K' kuspidakurva. Emedan tangentplanerna till K' bilda en serie af den beskaffenheten att genom en arbiträr punkt μ dylika planer gå, de sednare planerna åter gå genom O och bilda en serie planer, af hvilka $3(\nu - \mu) + \kappa$ gå genom en godtyckligt tagen punkt: så följer att den af de ifrågavarande skärningslinierna genererade ytan är af ordningen $3\nu - 2\mu + \kappa$, samt att densamma har O såsom μ :multipelpunkt. — Häraf slutligen:

Den af binormalerna till en geometrisk kurva af μ :te ordningen, ν :te klassen, som besitter κ spetsar, genererade ytan är af en ordning och klass lika med $3\nu - 2\mu + \kappa$. Densamma har μ generatricer liggande i planet oändligt långt borta.

64. Emedan kurvan K i hela sin utsträckning ligger på den sista ytan, och kurvans rektificerande plan i en punkt innehåller såväl denna punkts binormal som dess tangent till kurvan, är klart att detsamma planet måste tangera den af binormalerna genererade ytan i den ifrågavarande punkten på K :

Kurvans K rektificerande yta är, längs K sjelf, omskrifven den af dess binormaler genererade ytan.

Emedan, enligt definitionen (42) på J , denna kurva ligger på polaren (63) för binormalernas yta, samt planet genom O och en generatrice till den nämnda polaren är (45) ett tangentplan till J ; så måste kägla, som med O såsom spets är omskrifven J , längs denna sednare kurvan tangera polaren för binormalernas yta:

En kurvas normalyta är envelopperad af asymptotplanerna för den af kurvans binormaler genererade ytan.

65. Den första satsen i föregående artikel, hvilken lemna oss den rektificerande ytan såsom sista polaryta för K i afseende på den af binormalerna genererade ytan, kan ock bestämma de öfriga singulariteterna för den förstådda ytan. Såsom varande sista polar för K , är den rektificerande ytan orten för de punkter, hvilkas första polarer, i afseende på binormalernas yta, tangera K ; såväl som den rektifice-

rande ytans kupidalkurva är orten för de punkter, hvilkas första polarer, i afseende på binormalernas yta, osculera K. — Samtliga första polarerna gå genom dubbelkurvan till binormalernas yta och tangera densamma ytan i dess spetsar. Spetsarne på K äro sjelfva spetsar på binormalernas yta; antalet af de öfriga punkter ω , i hvilka denna ytans dubbelkurva träffar K, utmärka vi med d .

De serskilda knipporna och näten i det ifrågavarande första polarsystemet hafva i kurvans K spetsar och i punkterna ω samma beskaffenheter som knipporna och näten i första polarsystemet, respektive principal-normalernas yta, hafva i kurvans K spetsar och denna kurvas öfriga d' skärningspunkter ω' med dubbelkurvan till den sistnämnda ytan. De tal, som angifva huru många gånger spetsarne på K och punkterna ω ingå såsom berörings- och osculationspunkter med de förstnämnda knipporna och näten, äro då lika med motsvarande tal för de seduare knipporna och näten. De tal, som i detta afseende beträffa punkterna ω , ω' , härledas af (47); talen åter, som angå spetsarne på K, bestämmas medelst satsen (55), att den af tangenterna till K genererade ytan är omskrifven principal-normalernas yta längs K, d. v. s. att sista polaren för K, i afseende på principal-normalernas yta, är sammansatt af den nämnda tangentytan till K och af de planer, som med denna kurva hafva en beröring af tredje ordningen.

De tangentplaner till den nämnda sista polaren, hvilka gå genom en gifven punkt, äro tangentplanerna till principal-normalernas yta i de utom ω' och spetsarne på K befintliga skärningspunkterna emellan denna kurva och första polaren för den gifna punkten i afseende på principal-normalernas yta; deras antal är:

$$\mu(4\nu - 2\mu + \kappa - 1) - d' - 3\kappa.$$

Å andra sidan är klassen för kurvans K tangentyta $= 3(\nu - \mu) + \kappa$; sålunda:

$$\mu(4\nu - 2\mu + \kappa - 1) - d' - 3\kappa = 3(\nu - \mu) + \kappa,$$

hvarigenom d' är bestämd.

Antalet ytor i en första polarknipa, respektive principal-normalernas yta, hvilka tangera K, är lika med ordningen ν för kurvans K tangentyta tillsammans med antalet $6\nu - 8\mu + 3\kappa$ planer med beröring af tredje ordningen till K; d. ä.:

$\nu + 2\mu(4\nu - 2\mu + \kappa - 2) - 2d' - \kappa = 7\nu - 8\mu + 3\kappa$, hvaraf, genom elimination af d' :

$$(a) \dots\dots\dots \kappa = 5.$$

Antalet ytor i ett första polarnät, som osculera K, hafva såsom poler ett visst plans skärningspunkter med K och detsamma planets skärningspunkter med de två (närbelägna) beröringsgeneratricerna emellan kurvans tangentyta och dess förutnämnda vändtangenter: sålunda:

$3\nu + 3\mu (4\nu - 2\mu + \kappa - 3) - 3d' - y \cdot \kappa = \mu + 2(6\nu - 8\mu + 3\kappa)$, hvaraf, genom elimination af d' :

(b) $y = 6$.

Vi framgå härefter till bestämningen af den rektificerande ytans egendomligheter. Denna yta är ensam sista polar för K i afseende på binormalernas yta, ty *den rektificerande ytan saknar vändtangenterplaner*, då såsom öfverallt varit förutsatt om K, denna kurva saknar stationära tangenter. Skall nemligen ett plan i två närbelägna punkter vara rektificerande plan för K, måste dessa punkters principalnormaler vara parallela, hvilket nödvändigt förutsätter tillvaron af en stationär tangent för K.

Klassen för sista polaren till K, i afseende på binormalernas yta, d. v. s. för den rektificerande ytan till K är:

$$\mu (3\nu - 2\mu + \kappa - 1) - d - 3\kappa,$$

och enligt (62): $4\nu - 3\mu + \kappa$. — Genom equationen:

$$\mu (3\nu - 2\mu + \kappa - 1) - d = 4\nu - 3\mu + 4\kappa$$

är sålunda d bestämd.

Den rektificerande ytans ordning är (equ. (a)):

$$\nu + 2\mu (3\nu - 2\mu + \kappa - 2) - 2d - 5\kappa = 9\nu - 8\mu + 3\kappa,$$

när d elimineras bort.

Ordningen för den rektificerande ytans kuspidualkurva är (equ. (b)):

$$3\nu + 3\mu (3\nu - 2\mu + \kappa - 3) - 3d - 6\kappa = 15(\nu - \mu) + 6\kappa.^1).$$

66. Problemerna: att till en geometrisk kurva draga principal-normalplaner genom en gifven punkt, att draga de principal-normaler som träffa en gifven rät linie etc., finna sina lösningar i konstruktionerna af de nyss behandlade ytorna: normalytan, principal-normalernas yta, etc. Om dessa konstruktioner kan anmärkas att, emedan de ifrågavarande ytorna äro geometriska, det endast behöfves kännedom om ett inskränkt antal principal-normalplaner, principal-normaler etc., för att hvardera ytans natur skall vara fullständigt bestämd: de ifrågavarande problemernas lösningar bero då endast af dessa normalplaners och normalers lägen. — Det först nämnda

¹⁾ En detaljerad undersökning af de i denna § behandlade ytors och kurvors förhållanden till hvarandra finner man i Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung von Dr. W. SCHELL, Leipzig 1859.

problemet, uttryckt på följande sätt: "bestäm de punkter på en geometrisk kurva, hvilkas principal-normalplaner gå genom en gifven punkt" erhåller enklare sin lösning af ett theorem, framgående ur (34), hvilket äfven kan läggas till grund för bestämningen af den geometriska kurvans normalyta. Detta theorem och den deraf härledda uppfattningen af normalytan blifva föremål för de närmast följande artiklarne.

67. Orten för en punkt p , hvars polarplaner respektive två gifna ytor $C_m, C_{m'}$, af m :te och m' :te ordningen, skära hvarandra i en linie, vinkelrät mot rätta sammanbindningslinien emellan p och en fast punkt o , är en yta af ordningen $m + m' - 1$, som går genom o , genom polerna, resp. C_m och $C_{m'}$, för planet oändligt långt borta, genom dubbelpunkterna och spetsarne på kurvan $(C_m C_{m'})$, i hvilka sednare punkter den tangerar kurvan, samt träffar densamma dessutom i de punkter, hvilkas principal-normalplaner gå genom o . — Ortens asymptotkurva är till sitt läge oberoende af läget för o .

Denna sats är, såsom redan nämnt, innehållen i (34). — Den ifrågavarande ytans ordningstal kan äfven härledas på följande sätt. En arbiträr linie L genom o träffas af ytan: 1^o i punkten o , emedan alltid genom denna punkt ett plan kan dragas vinkelrät mot skärningslinien emellan polarplanerna för o i afseende på C_m och $C_{m'}$; 2^o i $m + m' - 2$ punkter, varande på samma gång skärningspunkter emellan L och orten för de punkter, hvilkas polarplaner i afseende på de båda ytorna skära hvarandra i en linie vinkelrät mot L . Häraf ordningstalet $= m + m' - 1$. — De öfriga delarne af theoremet äro omedelbara följder af ytans definition såsom ort för punkter. Vi beteckna densamma kortligen med M_o .

68. Af det nämnda följer att: När o rör sig utåt en rät linie L , bilda de motsvarande M_o en knippa ytor, hafvande alla densamma asymptotkurvan, och träffande L i samma system af $m + m' - 2$ punkter.

Deraf att samtliga ytorna i knippan hafva samma asymptotkurva, härledes enligt (9 Koroll.) den följande satsen:

Om genom tre punkter på en rät linie man drager tre grupper normaler till en geometrisk kurva, så ligga de tre tyngdpunkterna för de serskilda gruppernas normalpunkter ¹⁾ på en och samma rätta linie.

69. När o rör sig utåt ett plan, bilda motsvarande M_o ett geometriskt nät; samtliga ytorna M bilda ett geometriskt system. — Af denna sats och den första i föregående artikel sluta vi, att punkterna o i rymden och ytorna M_o motsvara

¹⁾ Med normalpunkt förstås den punkt, i hvilken den ifrågavarande normalen träffar kurvan vinkelrät.

hvarandra på samma sätt som punkter motsvara sina första polarer i afseende på en yta af ordningen $m + m'$.

Emedan normalytan för skärningskurvan emellan C_m och $C_{m'}$ är enveloppen af kurvans principal-normalplaner, blir densamma ytan ort för de punkter o , hvilkas motsvarande ytor M_0 tangera kurvan. Normalytans kuspidakurva, såsom varande ort för skärningspunkten emellan tre konsekutiva normalplaner, blir ort för de punkter, hvilkas motsvarande M oskulera ($C_m C_{m'}$); kuspidakurvans spetsar motsvara M hafvande med ($C_m C_{m'}$) en beröring af tredje ordningen; o. s. v.:

Normalytan för en skärningskurva emellan två geometriska ytor kan uppfattas såsom skärningskurvans sista polaryta i afseende på en yta, hvars ordning är summan af de två gifnas ordningstal.

Härefter följa normalytans singulariteter af § II.

70. Såsom en andra konsekvens af den uttalade motsvarigheten emellan punkterna o och ytorna M_0 framställa vi följande sats:

Om genom en punkt p drages ett plan P vinkelrät mot skärningslinien emellan polarplanerna för p i afseende på C_m och $C_{m'}$, så skall, när p rör sig utåt en rät linie L , planet P enveloppera en developpabel yta af ordningen $2(m + m' - 2)$, af klassen $m + m' - 1$, besittande en kuspidakurva af ordningen $3(m + m' - 3)$, samt tangerande planet oändligt långt borta och hafvande L sjelf såsom tangent i $m + m' - 2$ punkter.

När de gifna ytorna äro af andra ordningen, blir sålunda den af P envelope-rade ytan den af tangenterna till en viss kubisk parabel genererade ytan.

71. I artiklarne (42—65) är förutsatt om kurvan K , att den ej är parabolisk, det vill säga att den ej i någon punkt tangerar planet oändligt långt borta, eller att ingen af dess asymptoter ligger oändligt långt borta. När den är parabolisk, blir planet oändligt långt borta sjelf en beståndsdel af de ytor, som i de nämnda artiklarne definierats. Vi gifva här en bestämning af några väsentligare, från de förut gifna differenta, egenskaperna för normalytan, principal-normalernas yta och krökningskurvan för det fall att kurvan K tangerar i k punkter planet oändligt långt borta.

Dervid kan samma väg följas som vid de föregående bestämningarne, endast det iakttages att ytan K' nu går k gånger genom O . — Kurvan K förutsätta vi fortfarande vara af μ :te ordningen, ν :te klassen samt besitta κ spetsar.

Kurvan K , som i k punkter tangerar planet oändligt långt borta, har en normalyta af klassen $\mu + \nu - k$ och af ordningen $3\nu - 3k + \kappa$. Densamma har planet oändligt långt borta såsom vändtangentsplan i k punkter och såsom tangentsplan längs $\mu - 2k$ stationära generatricer. Dess kuspidualkurva är af ordningen $6\nu - 4\mu - 3k + 3\kappa$.

Den af principal-normalerna till K genererade ytan är af ordningen och klassen $4\nu - 2\mu - k + \kappa$; den osculerar normalytans stationära generatricer oändligt långt borta, tangerar i en punkt på hvardera af dem planet oändligt långt borta, samt har detsamma såsom stationärt tangentsplan i k punkter.

Krökningskurvan för K är af ordningen $6\nu - 3\mu - 3k + 2\kappa$.

Huru, då kurvan K har stationära tangenter, de förut gifna singulariteterna för de i denna § behandlade ytorna förändras, framgår äfvenledes af de bevisningsmetoder, som i (42—63) varit använda:

Om K är en kurva, som ej är parabolisk, men har Θ stationära tangenter, så har dess normalyta, utom de förut nämnda μ stationära generatricerna, Θ andra generatricer oändligt långt borta, hvilkas tangentsplaner dock icke äro oändligheten: ytans ordning och klass blifva oförändrade.

Principal-normalernas yta är i detta fall af ordningen $4\nu - 2\mu - \Theta + \kappa$;

Krökningskurvan är af ordningen $6\nu - 3\mu + 2\kappa - \Theta$.

§. V. Några satser om geometriska kurvors Kröknings- och Vridningsradier.

72. * Om C är rätvinkliga projektionen på ett plan E af en kurva K , och m' är projektionen på samma plan af en punkt m på K , blir den i m' osculerande cirkeln till C projektionen af en viss ellips, som osculerar K i m och som ligger i densamma punktens osculerande plan för K . Krökningsradien i m till K är då identisk med krökningsradien i samma punkt för den nämnda ellipsen. Om R är denna krökningsradie, R' krökningsradien i m' till C , om ν är vinkeln emellan E och kurvans K tangent i m , och slutligen ω vinkeln emellan E och det osculerande planet i samma punkt: så erhåller man, under iakttagande att R är lika med kubén på hälften af ellipsens konjugatdiameter för m , dividerad med $\frac{1}{\pi}$ gånger ellipsens area:

$$R = R' \cdot \sec^3 \nu \cdot \cos \omega.$$

Denna formel bevisar att:

Om genom tangenten till K i en punkt m man drager en serie planer, och på hvardera planet bildar den rätvinklīga projektionen af K ; ligga projektionernas krökningscentra till m på en rät linie vinkelrät mot det i m oskulerande planet för K .

Genom att på C tillämpa satsen: "Om till en plan kurva dragas dess tangenter från en punkt o i kurvans plan, eger emellan krökningsradierna R' i beröringspunkterna m' följande relation rum: $\sum \frac{R'}{om'^3} = 0$ "¹⁾, finner man för den geometriska kurvan K följande egenskap:

Om $o_1, o_2, \dots$ äro skärningspunkterna emellan en rät linie L och de tangenter till en geometrisk kurva som träffa linien, samt $m_1, m_2, \dots$ äro tangenternas beröringspunkter, $R_1, R_2, \dots$ kurvans krökningsradier i beröringspunkterna och slutligen $\theta_1, \theta_2, \dots$ äro vinklarne emellan L och de nämnda punkternas oskulationsplaner: så är:

$$\frac{R_1}{o_1 m_1^3} \cdot \operatorname{cosec} \theta_1 + \frac{R_2}{o_2 m_2^3} \cdot \operatorname{cosec} \theta_2 + \dots = 0.$$

När L ligger oändligt långt borta, erhåller denna sats följande uttryck:

Om till en geometrisk kurva dragas dess med ett gifvet plan parallela tangentplaner, om $v_1, v_2, \dots$ äro beröringspunkternas tangenters lutningar mot ett plan vinkelrät mot det först nämnda planet; $\omega_1, \omega_2, \dots$ desamma punkternas oskulationsplaners lutningar mot det sist dragna planet, samt $R_1, R_2, \dots$ kurvans krökningsradier i beröringspunkterna: så är:

$$R_1 \cdot \cos^3 v_1 \cdot \sec \omega_1 + R_2 \cdot \cos^3 v_2 \cdot \sec \omega_2 + \dots = 0.$$

73. Drager man till en geometrisk kurva två serier tangentplaner, planerna i den ena serien parallela med det ena och planerna i den andra serien parallela med det andra af två närbelägna planer A, B , inneslutande en vinkel α ; så blir, på grund af satsen om oföränderligheten af tyngdpunkten för de parallela tangentplanernas beröringspunkter: $\sum dx = 0$, om med dx utmärkes differensen emellan perpendiklarne mot ett plan E från två närbelägna beröringspunkter m, m' till två planer i de nämnda serierna.

Om $ds_1, ds_2, \dots$ utmärka bågelementerna på kurvan i dess beröringspunkter

¹⁾ Några satser om plana algebraiska kurvors Normaler. Lunds Univ. Årsskrift 1869 s.

38. — Denna sats gäller fullkomligt allmänt, såsom man ser af dess bevisning, d. v. s. äfven för det fall att kurvan har dubbelpunkter och spetsar, och derföre om kurvan C , hvilken, när K är en kurva med dubbel krökning, alltid besitter åtminstone dubbelpunkter.

$m_1, m_2, \dots$ med tangentplanerna i den ena serien, om $u_1, u_2, \dots$ äro vinklarne emellan en perpendikel mot E och tangenterna i $m_1, m_2, \dots$; så äro

$$dx_1 = ds_1 \cdot \cos u_1, \quad dx_2 = ds_2 \cdot \cos u_2, \dots$$

Vinklarne emellan de osculerande planerna i $m_1, m_2, \dots$ med planet A kalla vi $\omega_1, \omega_2, \dots$; vinklarne emellan desamma punkternas tangenter och linien (AB) äro $v_1, v_2, \dots$; om då $d\tau_1, d\tau_2, \dots$ äro kontingensvinklarne i $m_1, m_2, \dots$, så äro:

$$d\tau_1 = \alpha \cdot \frac{\sin v_1}{\sin \omega_1}, \quad d\tau_2 = \alpha \cdot \frac{\sin v_2}{\sin \omega_2}, \dots$$

och dermed, när $R_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}$, är kurvans krökningsradie i m_1 , R_2 krökningsradien i m_2 , etc.:

$$dx_1 = R_1 \cdot \frac{\sin v_1 \cos u_1}{\sin \omega_1} \alpha, \quad dx_2 = R_2 \cdot \frac{\sin v_2 \cos u_2}{\sin \omega_2} \alpha, \dots$$

Enligt det i början af artikeln nämnda theoremet följer då att:

Om till en geometrisk kurva dragas dess med ett gifvet plan parallela tangentplaner; om $\omega_1, \omega_2, \dots$ äro vinklarne emellan det gifna planet och beröringspunkternas osculationsplaner; om $R_1, R_2, \dots$ äro kurvans krökningsradier i tangentplanernas beröringspunkter; om $u_1, u_2, \dots$ äro vinklarne emellan en arbiträr linie i rymden och tangenterna i beröringspunkterna, och om slutligen $v_1, v_2, \dots$ äro dessa tangenters lutningar med en andra linie, parallel med tangentplanerna: så är:

$$R_1 \cdot \frac{\sin v_1 \cos u_1}{\sin \omega_1} + R_2 \cdot \frac{\sin v_2 \cos u_2}{\sin \omega_2} + \dots = 0.$$

Koroll. Om den första linien äfven är parallel med tangentplanerna men vinkelrät mot den andra linien, så blifva $u_1 = \frac{\pi}{2} - v_1$, $u_2 = \frac{\pi}{2} - v_2, \dots$ och den före-

gående equationen dermed $R_1 \cdot \frac{\sin^2 v_1}{\sin \omega_1} + R_2 \cdot \frac{\sin^2 v_2}{\sin \omega_2} + \dots = 0$. Väljes för den andra

linien ett nytt läge vinkelrät mot det första, så blir $R_1 \cdot \frac{\cos^2 v_1}{\sin \omega_1} + R_2 \cdot \frac{\cos^2 v_2}{\sin \omega_2} + \dots = 0$.

Genom addition af de båda sista equationerna erhåller man:

Om till en geometrisk kurva dragas dess med ett gifvet plan parallela tangentplaner; om $\omega_1, \omega_2, \dots$ äro vinklarne emellan det gifna planet och beröringspunkternas osculationsplaner, och $R_1, R_2, \dots$ äro kurvans krökningsradier i beröringspunkterna; så är:

$$\frac{R_1}{\sin \omega_1} + \frac{R_2}{\sin \omega_2} + \dots = 0.$$

74. Den af tangenterna till K genererade ytan skära vi med ett plan E . Den punkt, i hvilken skärningskurvan träffas af tangenten till K i punkten m , kalla vi m' och begagna oss vidare af följande beteckningar: R' är krökningsradien i m' till den plana kurvan, $d\tau'$ dess kontingensvinkel i samma punkt; ds' bågelementet på densamma, innehållet emellan m' och skärningspunkten emellan E med tangenten i den m nästföljande punkten på K ; $d\tau$ kontingensvinkeln i m till den seduare kurvan; $d\sigma$ vinkeln emellan osculerande planet i m och nästföljande osculerande plan; v vinkeln emellan tangenten till K i m och tangenten i m' till den plana skärningskurvan på E ; slutligen ω vinkeln emellan planet E och kurvans K osculerande plan i m .

Vi hafva då

$$ds' = mm' \cdot d\tau \cdot \operatorname{cosec} v,$$

$$d\tau' = \frac{d\sigma}{\sin \omega} \cdot \sin v;$$

hvaraf

$$\frac{ds'}{d\tau'} = R' = mm' \cdot \frac{\sin \omega}{\sin^2 v} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Om P är pendikeln från m mot planet E , så är $P = mm' \sin v \cdot \sin \omega$; och sålunda:

$$R' = \frac{P}{\sin^3 v} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Om ds är bågelementet i m till kurvan K , är $\frac{ds}{d\tau}$ kurvans krökningsradie i punkten $m = R$, samt $\frac{ds}{d\sigma}$ kurvans radius torsionis eller vridningsradie i samma punkt $= r$. Deraf följer slutligen:

$$R' = \frac{P}{\sin^3 v} \cdot \frac{r}{R}.$$

Af den i (72) citerade satsen om de plana kurvorna, tillämpad på den här beskifna plana kurvan i E , slutar man att:

Om från en punkt o dragas de osculerande planerna till en geometrisk kurva, och $m_1, m_2, \dots$ äro planernas oskulationspunkter; $P_1, P_2, \dots$ pendiklarne från dessa punkter mot ett arbiträrt plan genom o ; om vidare $op_1, op_2, \dots$ äro pendiklarne från o mot kurvans tangenter i $m_1, m_2, \dots$; $R_1,$

$R_2, \dots$ kurvans krökningsradier och slutligen $r_1, r_2, \dots$ dess vridningsradier i de samma punkterna: så måste:

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{P_1}{op_1^3} + \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{P_2}{op_2^3} + \dots = 0.$$

När o ligger oändligt långt borta, erhåller denna sats följande uttryck:

Om man drager de med en gifven rät linie parallela osculerande planerna till en geometrisk kurva, samt $P_1, P_2, \dots$ äro oskulationspunkternas perpendiklar mot ett med den gifna linien parallellt plan; $R_1, R_2, \dots$; $r_1, r_2, \dots$ äro oskulationspunkternas kröknings- och vridningsradier, samt $\tau_1, \tau_2, \dots$ vinklarna emellan kurvans tangenter i $m_1, m_2, \dots$ och den gifna riktninglinien: så är:

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{P_1}{\sin^3 \tau_1} + \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{P_2}{\sin^3 \tau_2} + \dots = 0.$$

Anmärkning. Den sista satsen är en konsekvens af theoremet: "Om man till en plan geometrisk kurva drager dess parallela tangenter, är summan af beröringspunkternas krökningsradier lika med noll"¹⁾. När planet oändligt långt borta skulle vara osculerande plan för K i en punkt hafvande en stationär tangent, gäller satsen för de ändligt belägna osculerande planernas beröringspunkter på samma sätt som för hvarje annan icke-parabolisk kurva, ty "om en plan geometrisk kurva har spetsar oändligt långt borta med oändligheten såsom återvändstangent, och ej i någon annan punkt tangerar oändligheten, samt man drager dess ändligt belägna med en gifven linie parallela tangenter: är summan af deras beröringspunkters krökningsradier noll." Detta inses omedelbart af det bevis, som för den först citerade satsen är gifvet i afhandlingen: Några satser om plana algebraiska kurvors Normaler s. 37.

73. Satserna i förra artiklen gälla, efter den nu gjorda anmärkningen, när den af tangenterna till K genererade ytan har stationära generatriceer oändligt långt borta, med planet oändligt långt borta såsom tangentplan längs dem, för de ändligt belägna osculerande planernas tangeringspunkter uteslutande; och dermed på detta sätt för kuspidualkurvan till kurvans K normalyta.

Emedan kontingensvinkeln i en punkt på den nämnda kuspidualkurvan är lika med vinkeln emellan osculerande planet i en motsvarande punkt på K och det närbelägna osculerande planet, samt vinkeln emellan två närbelägna osculerande planer till den första kurvan är kontingensvinkeln i motsvarande punkt på K : så frångår af den första satsen i förra artikeln:

¹⁾ I den till § I citerade afhandlingen i Liouvilles Journ. de Math. 1:ière serie, T. VI, nämnes denna sats såsom framställd af DUHAMEL.

Om från en arbiträr punkt o dragas principal-normalplaner till en geometrisk kurva, samt $m_1, m_2, \dots$ äro dessa planers normalpunkter, $R_1, R_2, \dots$; $r_1, r_2, \dots$ punkternas kröknings- och vridningsradier; om vidare $P_1, P_2, \dots$ äro perpendiculararne mot ett arbiträrt plan genom o från centra till de kulor som med kurvan hafva i $m_1, m_2, \dots$ en beröring af tredje ordningen; och slutligen $op_1, op_2, \dots$ äro perpendiculararne från o mot desamma punkternas krökningsaxlar: så är:

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{P_1}{op_1^3} + \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{P_2}{op_2^3} + \dots = 0.$$

Huru denna sats gestaltar sig för ett oändligt läge af o , är klart af sista satsen i förra artikeln.

76. Satserna i (74) kunna äfven tillämpas på den rektificerande ytans kuspidualkurva. Om med ε förstås tangeringspunkten emellan denna kurva och kurvans K i m rektificerande räta linie, samt H är vinkeln emellan den sednare linien och kurvans K tangent i m , så blir kuspidualkurvans koutingensvinkel i ε lika med dH . Två närbelägna oskulerande planer till kuspidualkurvan, rektificerande planer till K , bilda, alldenstund de rektificerande planerna äro vinkelräta mot principal-normalerna, med hvarandra en vinkel lika med vinkeln emellan principal-normalerna till K i m och nästgränsande punkt. Denna vinkel kalla vi dk , så att, om R^0 är kuspidualkurvans krökningsradie i ε och r^0 dess vridningsradie i samma punkt:

$$\frac{r^0}{R^0} = \frac{dH}{dk}.$$

Nu är åter

$$\frac{dH}{ds} = \frac{1}{\varepsilon m} \cdot \frac{d\tau}{dk}^1),$$

och $\frac{ds}{dk}$ = radien för kurvans K totala krökning i $m = \varrho$, $\frac{ds}{d\tau} = R$, som fortfarande betecknar krökningsradien till K i m ; så att slutligen:

$$\frac{r^0}{R^0} = \frac{1}{\varepsilon m} \cdot \frac{\varrho^2}{R}.$$

Häraf följande sats:

Om från en arbiträr punkt o man drager de rektificerande planerna till en geometrisk kurva, om $m_1, m_2, \dots$ äro planernas beröringspunkter med kurvan; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ deras rektificerande liniers beröringspunkter med den rektificerande

1) SCHELL: Theorie der Curven s. 58.

ytans kuspidualkurva; $R_1, R_2, \dots$ punkternas $m_1^*, m_2^*, \dots$ krökningsradier och $q_1, q_2, \dots$ radierna för kurvans totala krökningar i desamma punkterna; om vidare $P_1, P_2, \dots$ äro perpendiculararne från $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ mot ett arbiträrt plan genom o , och slutligen $op_1, op_2, \dots$ äro perpendiculararne från o mot de rektificerande linierna $\varepsilon_1 m_1, \varepsilon_2 m_2, \dots$: så måste:

$$\frac{P_1}{\varepsilon_1 m_1 \cdot op_1^3} \cdot \frac{q_1^2}{R_1} + \frac{P_2}{\varepsilon_2 m_2 \cdot op_2^3} \cdot \frac{q_2^2}{R_2} + \dots = 0.$$

77. Dragas från en punkt O , hvilken som heldst i rymden, räta linier parallela med tangenterna till en geometrisk kurva K , erhålles en kägla, hvars generatricer motsvara punkterna på K , en och en: på det sättet nemligen att generatricen är parallel med kurvans K tangent i motsvarande punkt. Käglaens tangentplan längs en generatrice är parallellt med kurvans K oskulerande plan i den punkt som motsvarar generatricen. — Bågelementet ds' och kontingensvinkeln $d\tau'$ i en punkt a på denna kägla skärningskurva med ett plan E äro gifna genom equationerna:

$$ds' = Oa \cdot \frac{d\tau}{\sin u},$$

$$d\tau' = \frac{\sin u}{\sin \omega} \cdot d\sigma,$$

hvarst u utmärker lutningen emellan käglaens generatrice Oa och tangenten i a till den plana skärningskurvan, ω vinkeln emellan E och käglaens tangentplan längs Oa , åter $d\tau, d\sigma$ hänföra sig till K och dess mot Oa svarande punkt med samma betydelse som i de föregående artiklarne.

Är P perpendicularen från O mot E , blir $P = Oa \cdot \sin u \cdot \sin \omega$, och dermed den plana skärningskurvas krökningsradie i a :

$$R' = \frac{ds'}{d\tau'} = \frac{P}{\sin^3 u} \cdot \frac{r}{R},$$

om r, R hafva för K och den punkten, som motsvarar Oa , samma betydelse som förut.

Är o en punkt i E och från densamma dragas tangenter till den nämnda plana kurvan i E , och $a_1, a_2, \dots$ äro beröringspunkterna, $R'_1, R'_2, \dots$ kurvans krökningsradier i dessa punkter, samt perpendiculararne från o mot $Oa_1, Oa_2, \dots$ äro $op_1, op_2, \dots$; så blir, när $R_1, r_1; R_2, r_2; \dots$ äro kurvans K kröknings- och vridningsradier i de motsvarande punkterna till $Oa_1, Oa_2, \dots$:

$$\frac{R'_1}{oa_1^3} + \frac{R'_2}{oa_2^3} + \dots = \frac{P}{op_1^3} \cdot \frac{r_1}{R_1} + \frac{P}{op_2^3} \cdot \frac{r_2}{R_2} + \dots = 0,$$

eller emedan $op = oO \cdot \sin \tau$, om τ utmärker lutningen emellan oO och generatricen Oa :

$$\sum \frac{r}{R} \cdot \operatorname{cosec}^3 \tau = 0.$$

Detta bevisar att:

Om till en geometrisk kurva dragas de osculerande planer, som äro parallela med en gifven rät linie L , om $m_1, m_2, \dots$ äro planernas osculationspunkter med kurvan, $\tau_1, \tau_2, \dots$ vinklarne som dessa punkters tangenter innesluta med L , samt $R_1, r_1; R_2, r_2; \dots$ äro kurvans kröknings- och vridningsradier i desamma punkterna; så är:

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \operatorname{cosec}^3 \tau_1 + \frac{r_2}{R_2} \cdot \operatorname{cosec}^3 \tau_2 + \dots = 0.$$

Denna sats är uttrycket af sista satsen (74) för det fall att planet, mot hvilket perpendiklarna $P_1, P_2, \dots$ äro fällda, tänkes ligga oändligt långt borta.

78. Genom att tillämpa denna sats på kuspidualkurvan till den gifna kurvans normalyta, finner man att:

Om till en geometrisk kurva dragas dess med en gifven rät linie L parallela principal-normalplaner, och $m_1, m_2, \dots$ äro dessa planers normalpunkter, $\theta_1, \theta_2, \dots$ vinklarne emellan L och desamma punkternas krökningsaxlar, samt $R_1, r_1; R_2, r_2; \dots$ äro kurvans kröknings- och vridningsradier i de samma punkterna: så är:

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \operatorname{cosec}^3 \theta_1 + \frac{R_2}{r_2} \cdot \operatorname{cosec}^3 \theta_2 + \dots = 0.$$

Densamma satsen, tillämpad på den rektificerande ytans kuspidualkurva, visar att:

Om till en geometrisk kurva K dragas de med en gifven rät linie L parallela rektificerande planerna; om $m_1, m_2, \dots$ äro deras tangeringspunkter med K ; $v_1, v_2, \dots$ vinklarne emellan dessa punkters rektificerande linier och L ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ desamma liniernas beröringspunkter med den rektificerande ytans kuspidualkurva; $R_1, \varrho_1; R_2, \varrho_2; \dots$ kurvans K krökningsradier och radier för totala krökning i $m_1, m_2, \dots$ så måste:

$$\frac{\varrho_1^2}{R_1} \cdot \frac{\operatorname{cosec}^3 v_1}{\varepsilon_1 m_1} + \frac{\varrho_2^2}{R_2} \cdot \frac{\operatorname{cosec}^3 v_2}{\varepsilon_2 m_2} + \dots = 0.$$

79. De hittills i denna paragraf framställda satserna äro samtliga konsekvenser af den i (72) citerade satsen om de plana kurvorna; vi skola här utveckla en andra sats om dessa sednare kurvor, hvilken kan gifva upphof till en ny serie satser om kurvorna i rymden.

Om m, m' äro två närbelägna punkter på en plan kurva C och från en, godtyckligt tagen, punkt O i kurvans plan perpendiklar Op, Op' fällas mot tangenterna

till C i m och m' , samt på desamma afsättas stycken $O\mu$, $O\mu'$ lika med $\frac{\lambda}{Op}$, $\frac{\lambda}{Op'}$ respektive; så ligga punkterna μ , μ' på kurvans C polar i afseende på en cirkel med centrum O och en radie $=\sqrt{\lambda}$. Denna polar kalla vi C' och se nu om dess bågsegment $\mu\mu'$ att:

$$\mu\mu' \cdot \sin Om'\mu = \mu\mu' \cdot \sin Omm' = O\mu \cdot d\tau,$$

när $d\tau$ är kurvans C kontingensvinkel i punkten m .

Kurvans C' kontingensvinkel i μ är lika med vinkeln mOm' , så att, om vi teckna densamma med $d\tau'$, vi erhålla:

$$mm' \cdot \sin Om'm = Om \cdot d\tau'.$$

Af dessa två equationer följer, när mm' tecknas med ds och vinkeln Omm' , som är lutningen emellan Om och tangenten till C i m , tecknas med v , att:

$$\frac{\mu\mu'}{d\tau'} = \frac{O\mu \cdot Om \cdot d\tau}{ds \cdot \sin^2 v} = \lambda \cdot \frac{Om}{Op \cdot \sin^2 v} \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\lambda}{\sin^3 v} \cdot \frac{d\tau}{ds}.$$

Derföre, om R betyder krökningsradien till C i punkten m , ρ krökningsradien till C' i punkten μ , är:

$$\rho = \frac{\lambda}{R \cdot \sin^3 v}.$$

Satsen att kurvans C' med en gifven linie parallela tangenters beröringspunkter hafva krökningsradier bildande en summa noll, öfvergår härmed i en sats om krökningsradierna för C i de punkter på densamma, som äro poler, respektive cirkeln med centrum i O, till de föregående tangenterna: — punkter, som ligga på en och samma räta linie genom O:

Äro $R_1, R_2, \dots$ en plan geometrisk kurvas krökningsradier i dess skärningspunkter med en rät linie, som träffar densamma under vinklarne $v_1, v_2, \dots$; så måste:

$$R_1 \sin^3 v_1 + R_2 \sin^3 v_2 + \dots = 0^1).$$

80. Tillämpas denna sats på den orthogonala skärningskurvan med en cylinder omskrifven K (72), erhåller man:

Äro $m_1, m_2, \dots$ skärningspunkterna emellan ett plan E och en geometrisk kurva K, samt L är en arbiträr linie i det skärande planet och man drager tangentplaner, parallela med L, till K i punkterna $m_1, m_2, \dots$; om då $u_1, u_2, \dots$ äro vinklarne emellan E och dessa sednare planer; $v_1, v_2, \dots$ vinklarne emellan

¹⁾ Denna sats innehålles i ett allmänt theorem om skärningspunkterna emellan två geometriska kurvor, liggande i samma plan, gifvet af LIOUVILLE i slutet af den till § 1 citerade afhandlingen.

L och kurvans tangenter i $m_1, m_2, \dots$; $\omega_1, \omega_2, \dots$ vinklarne emellan L och desamma punkternas osculerande planer för K, samt slutligen $R_1, R_2, \dots$ kurvans krökningsradier i de nämnda punkterna: så måste:

$$\frac{\sin \omega_1}{R_1 \cdot \sin^3 u_1 \cdot \sin^3 v_1} + \frac{\sin \omega_2}{R_2 \cdot \sin^3 u_2 \cdot \sin^3 v_2} + \dots = 0.$$

84. Af (74) erhåller man medelst samma sats:

Om $m_1, m_2, \dots$ äro de punkter på K, hvilkas tangentplaner gå genom en rät linie L, och E är ett arbiträrt plan genom samma L, samt $P_1, P_2, \dots$; $R_1, R_2, \dots$; $r_1, r_2, \dots$ hafva samma betydelse som i (74); om vidare vinklarne emellan tangentplanerna genom L till $m_1, m_2, \dots$ och desamma punkternas osculerande planer äro $\iota_1, \iota_2, \dots$; vinklarne emellan E och de nämnda tangentplanerna äro $\pi_1, \pi_2, \dots$: så måste:

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{4}{P_1} \cdot \frac{\sin^3 \pi_1}{\sin^3 \iota_1} + \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{4}{P_2} \cdot \frac{\sin^3 \pi_2}{\sin^3 \iota_2} + \dots = 0.$$

82. Tillämpas samma sats (79) på den plana kurvan (77), finner man att:

Om man drager de med ett gifvet plan E parallela tangentplanerna till en geometrisk kurva; om R_1, r_1 ; R_2, r_2 ; ... betyda kröknings- och vridningsradierna i beröringspunkterna med planerna; $\omega_1, \omega_2, \dots$ vinklarne emellan E och kurvans osculerande planer i de samma punkterna: så är:

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \operatorname{cosec}^3 \omega_1 + \frac{R_2}{r_2} \cdot \operatorname{cosec}^3 \omega_2 + \dots = 0.$$

Denna sats kan uppfattas såsom uttrycket af (84) för det fall, att såväl L som det derstädes betraktade planet E tänkas ligga oändligt långt borta.

Anmärkning. Satsen (77) och den sistgifna satsen innehålla tvenne egenskaper för den i (77) betraktade kägslans skärningskurva med en kula, hvars centrum är kägslans spets; dessa egenskaper äro framställda i de följande två theoremerna:

Om från en arbiträr punkt o på en kula man till en geometrisk kurva, liggande på samma kula, drager de storcirkelar, som tangera kurvan; om $m_1, m_2, \dots$ äro beröringspunkterna, $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ kurvans sferiska krökningsradier i beröringspunkterna, samt $\theta_1, \theta_2, \dots$ vinklarne som mätas af cirkelbågarne $om_1, om_2, \dots$: så är:

$$\frac{\varrho_1}{\sin^3 \theta_1} + \frac{\varrho_2}{\sin^3 \theta_2} + \dots = 0.$$

Om $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ äro de sferiska krökningsradierna till en geometrisk kurva, liggande på en kula, i dess skärningspunkter med en storcirkel på samma kula,

och $v_1, v_2, \dots$ äro de vinklar, under hvilka storcirkeln och kurvan träffa hvarandra; så är:

$$\frac{1}{\rho_1 \cdot \sin^3 v_1} + \frac{1}{\rho_2 \cdot \sin^3 v_2} + \dots = 0.$$

Med kurvans sferiska krökningsradie i en punkt m förstås qvoten af dess båg-element mm' med vinkeln emellan de två (oändligt närbelägna) storcirklar, som tangera kurvan, den ena i m och den andra i m' .

Anmärkningar till § I.

a. Om de serier ytor som i artiklarne 2 och 5 blifvit afhandlade. — De serier af grupper tangentplaner och af developpabla ytor, som i dessa artiklar varit betraktade, äro båda karakteriserade deraf att, då i allmänhet ν ytor i serien kunna dragas genom en arbiträr punkt, endast $\nu - k + 1$ differenta ytor i samma serie kunna läggas genom en punkt O , när denna på en af ytorna är en k -faldig punkt. I denna sednare, som vi kalla U , hafva då k ytor i serien öfvergått; eller det finnes, utom de $\nu - k$ från U differenta ytor som gå genom O , ännu k andra ytor oändligt nära belägna till U , gående genom samma punkt O . — Vi se äfven om de i de nämnda artiklarne behandlade serierna, att de äro af den beskaffenheten, att, om af de ytor i serien, som gå genom en punkt O (utom C^m), k ytor äro hvarandra närbelägna eller hafva sammanfallit med en yta U , punkten O måste vara en k -faldig punkt på U .

En serie ytor af den beskaffenheten, att ν ytor gå genom en arbiträr punkt, är framställd genom equationen:

$$(1) \dots\dots\dots F(x, y, z, \lambda) = 0,$$

af ν -te graden i afseende på λ . Värdena på λ , som motsvara ytorna, gående genom en bestämd punkt x_0, y_0, z_0 , äro rötterna till equationen:

$$(2) \dots\dots\dots F(x_0, y_0, z_0, \lambda) = 0.$$

Vi antaga (1) vara equation för en serie ytor af den förutnämnda beskaffenheten; att x_0, y_0, z_0 , äro koordinaterna för O och att denna punkt är k -faldig för en yta U , motsvarande värdet λ_0 . Då måste, enligt hvad förut är nämnt, equa-

tionen (2) lemna oss k rötter lika med λ_0 ; och omvänt, om (2) lemnar oss k rötter lika med λ_0 , måste detta värde λ_0 tillhöra en yta i serien med k :faldig punkt i O.

Nu äro villkoren för k lika rötter i (2), när $F(x_0, y_0, z_0, \lambda)$ kortligen tecknas med $F(\lambda)$:

$$(3) \dots\dots\dots F(\lambda_0)=0, F'(\lambda_0)=0, F''(\lambda_0)=0, \dots F^{(k-1)}(\lambda_0)=0.$$

Dessa equationer uttrycka då ock villkoren att ytan i serien (1), som motsvarar λ_0 , skall hafva en k :faldig punkt i O.

De k närbelägna ytor, som gå genom O, äro:

$$(4) F(x, y, z, \lambda_0) = F(\lambda_0) = 0, F(\lambda_0 + d\lambda) = F(\lambda_1) = 0, F(\lambda_1 + d\lambda) = F(\lambda_2) = 0, \dots F(\lambda_{k-2} + d\lambda) = F(\lambda_{k-1}) = 0,$$

hvarrest $d\lambda$ är en oändligt liten storhet.

Den första af dessa ytor har en k :faldig punkt i O; equationen för den andra ytan, när för x, y, z substitueras koordinaterna för O, satisfierar enligt (3) de efterföljande villkoren:

$$(5) \dots\dots\dots F'(\lambda_0 + d\lambda) = 0, F''(\lambda_0 + d\lambda) = 0, \dots F^{k-2}(\lambda_0 + d\lambda) = 0;$$

hvilka, enligt hvad förut om (3) är nämnt, bevisa att ytan $F(\lambda_1) = 0$ har en $k-4$:faldig punkt i O.

När i equationen för den tredje af ytorna (4) koordinaterna för O insätts för x, y, z , uppfyller densamma enligt (5) de följande villkoren:

$$F'(\lambda_1 + d\lambda) = 0, F''(\lambda_1 + d\lambda) = 0, \dots F^{k-3}(\lambda_1 + d\lambda) = 0;$$

hvilka bevisa att denna yta, ytan $F(\lambda_2) = 0$ har en $k-2$:faldig punkt i O.

Den fjärde ytan, ytan $F(\lambda_3) = 0$ har en $k-3$:faldig punkt i O, etc.; den näst sista af ytorna (4) en dubbelpunkt i O, och den sista, $F(\lambda_{k-1}) = 0$, innehåller O endast såsom en enkel punkt.

Häraf följer att r :te polarerna för en arbiträr punkt ι , i afseende på de $k-r$ första ytorna (4), gå genom O, och att sålunda, då i allmänhet genom en arbiträr punkt ν polarer för ι kunna dragas, nu endast $\nu-k+r$ andra r :te polarer för ι , respektive andra ytor i serien än U, kunna dragas genom O.

D. v. s.: om i en serie ytor af den här anmärkta beskaffenheten en yta skulle hafva en $r+s$:faldig punkt i O, så att r :te polaren för ι innehåller O såsom s :multipelpunkt; så gå endast $\nu-s$ andra r :te polarer för ι , respektive lika många andra ytor i serien, genom O.

Det är uttrycket för $r=4$ af denna sats som i art 3 varit använt.

b. *Anm. till art. 13.* — Den fjärde i denna artikel framställda satsen härledes äfven såsom en konsekvens af första satsen i art. 9. Erinra vi oss nemligen att beröringspunkterna emellan en kurva ($C_m C_n$) och dess med ett gifvet plan parallela tangentplaner ligga på en yta J af ordningen $m+n-2$, som är ort för po-

lerna till de polarplaner, respektive C_m och C_n , hvilka skära hvarandra i en linie parallel med det gifna planet, samt att de ytor J , som motsvara skärningskurvorna emellan C_m och de serskilda $C_n, C'_n \dots$, bilda en knippa homografisk med (C_n, C'_n) ; så finna vi, att skärningskurvan emellan motsvarande ytor C_n och J genererar en yta T af ordningen $m+2n-2$, hvilken, i det fall att en yta C_n^0 i knippan går genom asymptotkurvan för C_m , äfven går genom densamma asymptotkurvan. Ytan T innehåller knippans (C_n, C'_n) basiskurva och skär sålunda C_m i en kurva, gående genom basiskurvans skärningspunkter med samma C_m . Af dessa skärningspunkter ligga mn punkter på asymptotkurvan för C_m och de öfriga $mn(n-1)$ punkterna på den andra delen af kurvan $(C_m C_n^0)$. Genom de första punkterna går den delen af kurvan (JT) , som är asymptotkurva för C_m ; genom de sednare punkterna den andra delen, som är af ordningen $m(m+2n-3)$ och som vi kortligen kalla T' . Enligt första satsen i artikel 9 ligga nu tyngdpunkterna för skärningspunkterna emellan T' och de serskilda C_n på en rät linie R . Om o är tyngdpunkten för de förutnämnda $mn(n-1)$ punkterna $(C_m C_n^0 C_n)$ och a är tyngdpunkten för de $mn(m+n-2)$ skärningspunkterna emellan $(C_m C_n)$ samt motsvarande J , samt α är tyngdpunkten på R af skärningspunkterna $(C_n T')$, så ligger α på räta linien oa och från o på ett afstånd $o\alpha = \frac{m+n-2}{m+2n-3} oa$. Emedan nu α beskriver linien R , måste a beskrifva en dermed parallel linie, d. v. s. enligt egenskapen hos punkterna $(C_m C_n J)$: när en yta C_n^0 i knippan går genom asymptotkurvan för C_m , ligga centra för de öfriga skärningskurvorna emellan C_m och ytor i knippan på en rät linie.

